Matematička analiza 1 - 2. auditorna vježba - RJEŠENJA

Zadatak 1 Riješite jednadžbe u skupu $\mathbb{C}$:

(a) $z^4 = (1 - i\sqrt{3})^8$,

(b) $(1 - i\sqrt{3})z^2 = (-2\sqrt{3} + 2i)(\overline{z})^3$,

(c) $z^5 \cdot (1 + i) = \overline{z}$,

(d) $z^3 - z^{-3} = i$.

Rješenje 1

(a) Budući da je
$$z^4 = (1 - i\sqrt{3})^8 = (-2 - 2i\sqrt{3})^4,$$
znamo da je $z_0 = -2 - 2i\sqrt{3}$ jedno rješenje ove jednadžbe. No, primijetimo da ako je z neko rješenje ove jednadžbe i $\omega \in \mathbb{C}$ takav da je $\omega^4 = 1$, onda je i $z\omega$ također rješenje ove jednadžbe. Doista,
$$(z\omega)^4 = z^4\omega^4 = (1 - i\sqrt{3})^8 \cdot 1 = (1 - i\sqrt{3})^8.$$
Također, ako pretpostavimo da su u i v dva rješenja jednadžbe $z^4 = (1 - i\sqrt{3})^8$, onda je $\omega \coloneqq \frac{u}{v}$ rješenje jednadžbe $\omega^4 = 1$.
Budući da je $\{i, -i, 1, -1\}$ skup svih rješenja jednadžbe $\omega^4 = 1$, zbog navedenog zaključujemo da je $\{z_0 i, -z_0 i, z_0, -z_0\} = \{-2 - 2i\sqrt{3}, 2 + 2i\sqrt{3}, 2 - 2i\sqrt{3}, -2 + 2i\sqrt{3}\}$ skup svih rješenja jednadžbe $z^4 = (1 - i\sqrt{3})^8$.

Drugi način:
Zapišemo li $1 - i\sqrt{3} = 2\left(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})\right)$, naša jednadžba postaje
$$z^4 = \left(2\left(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})\right)\right)^8 = 4^4\left(\cos(-\frac{8\pi}{3}) + i\sin(-\frac{8\pi}{3})\right)$$
pa su rješenja dana sa
$$z = 4\left(\cos(-\frac{2\pi}{3} + \frac{2k\pi}{4}) + i\sin(-\frac{2\pi}{3} + \frac{2k\pi}{4})\right),\ k \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

(b) Izjednačavanjem modula lijeve i desne strane dobivamo

$$2|z|^2 = |(1-i\sqrt{3})z^2| = |(-2\sqrt{3}+2i)\overline{z}^3| = 4|z|^3,$$

odnosno

$$2|z^2|\,(1-2|z|) = 0.$$

Iz ovoga vidimo da je $|z| = 0$ ili $|z| = \frac{1}{2}$.

Slučaj $|z| = 0$ zadovoljava samo $z = 0$, i to je zaista rješenje naše jednadžbe. Promotrimo sada slučaj kada je $|z| = \frac{1}{2}$. Znamo da postoji $\theta \in [0, 2\pi\rangle$ takav da je $z = \frac{1}{2}\,(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$, odnosno $\overline{z} = \frac{1}{2}\,(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$. Računanjem argumenta lijeve i desne strane dobivamo:

$$\arg\Big((1-i\sqrt{3})z^2\Big) = \arg\Big((-2\sqrt{3}+2i)\overline{z}^3\Big) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$-\frac{\pi}{3} + 2\theta = \frac{5\pi}{6} - 3\theta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$5\theta = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\theta = \frac{7\pi}{30} + \frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$$

Konačno dobivamo da su $z = 0$ i $z = \frac{1}{2} \cdot \left(\cos(\frac{7\pi}{30} + \frac{2k\pi}{5}) + i\sin(\frac{7\pi}{30} + \frac{2k\pi}{5})\right),\ k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ sva rješenja ove jednadžbe.

(c) Izjednačavanjem modula lijeve i desne strane dobivamo:

$$|z|^5 \cdot \sqrt{2} = |\overline{z}| = |z|,$$

odnosno

$$|z| \cdot \Big(|z|^4 \cdot \sqrt{2} - 1\Big) = 0.$$

Zaključujemo da je $|z| = 0$ ili $|z| = 2^{-\frac{1}{8}}$.

U slučaju kada je $|z| = 0$, $z = 0$ i to zaista je rješenje ove jednadžbe. Promotrimo sada slučaj kada je $|z| = 2^{-\frac{1}{8}}$. Znamo da postoji $\theta \in [0, 2\pi\rangle$ takav da je $z = 2^{-\frac{1}{8}}\,(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$, odnosno $\overline{z} = 2^{-\frac{1}{8}}\,(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$. Računanjem argumenta lijeve i desne strane dobivamo:

$$\arg\big(z^5 \cdot (1+i)\big) = \arg(\overline{z}) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$5\theta + \frac{\pi}{4} = -\theta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$6\theta = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\theta = -\frac{\pi}{24} + \frac{2k\pi}{6},\ k \in \mathbb{Z}$$

Konačno dobivamo da su $z = 0$ i $z = 2^{-\frac{1}{8}} \cdot \left(\cos(-\frac{\pi}{24} + \frac{2k\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{24} + \frac{2k\pi}{6})\right),\ k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ sva rješenja ove jednadžbe.

(d) Neka je $\omega = z^3$. Tada dana jednažba postaje

$$\omega - \frac{1}{\omega} = i$$

pa množenjem jednadžbe s ω dobivamo

$$\omega^2 - i\omega - 1 = 0.$$

Rješenja ove jednadžbe su

$$\omega_{1,2} = \frac{i \pm \sqrt{3}}{2}.$$

Sada trebamo riješiti jednadžbe:

$$z^3 = \omega_1 = \frac{\sqrt{3}+i}{2} \quad \text{i} \quad z^3 = \omega_2 = \frac{-\sqrt{3}+i}{2}.$$

$$z^3 = \omega_1 = \frac{\sqrt{3}+i}{2} = \cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6}) \implies z = \cos(\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}),\ k \in \{0,1,2\}$$
$$z^3 = \omega_2 = \frac{-\sqrt{3}+i}{2} = \cos(\frac{5\pi}{6}) + i\sin(\frac{5\pi}{6}) \implies z = \cos(\frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}) + i\sin(\frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}),\ k \in \{0,1,2\}$$

Zadatak 2 Odredite sve kompleksne brojeve z koji zadovoljavaju

(a) $|z+1| = 1 \quad \text{i} \quad \arg\big((1+i)z^3\big) = \frac{3\pi}{4}$,

(b) $|z| = 1 \quad \text{i} \quad \arg\big(z^2 - 1\big) = \arg(z^4)$.

Rješenje 2

(a)

$$\begin{gathered}\frac{3\pi}{4} = \arg((1+i)z^3) = \frac{\pi}{4} + 3\arg(z) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ 3\arg(z) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ \arg(z) = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z} \\ \arg(z) \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right\}\end{gathered}$$

Prvi slučaj: $\arg(z) = \frac{\pi}{6}$

$$z = x\sqrt{3} + ix, x > 0$$

$$\begin{gathered}1 = |z+1|^2 = (1 + x\sqrt{3})^2 + x^2 = 4x^2 + 2x\sqrt{3} + 1 \implies \\ 0 = 2x(2x + \sqrt{3}) > 0, \forall x > 0\end{gathered}$$

Drugi slučaj: $\arg(z) = \frac{5\pi}{6}$

$$z = -x\sqrt{3} + ix, x > 0$$

$$\begin{gathered}1 = |z+1|^2 = (1 - x\sqrt{3})^2 + x^2 = 4x^2 - 2x\sqrt{3} + 1 \implies \\ 0 = 2x(2x - \sqrt{3}) \implies x = \frac{\sqrt{3}}{2} \implies z = \frac{-3+\sqrt{3}}{2}\end{gathered}$$

Treći slučaj: $\arg(z) = \frac{3\pi}{2}$

$$z = -xi, x > 0$$

$$1 = |z+1|^2 = 1^2 + x^2 \implies x = 0$$

Jedino rješenje je $z = \frac{-3+\sqrt{3}}{2}$.

(b)

$$z^2-1=|z^2-1|\left(\cos(\arg(z^2-1))+i\sin(\arg(z^2-1))\right)=|z^2-1|\left(\cos(\arg(z^4))+i\sin(\arg(z^4))\right)$$

Budući da je $|z^4|=|z|^4=1$, znamo da je $\cos(\arg(z^4))+i\sin(\arg(z^4))=z^4$ pa dobivamo

$$z^2-1=|z^2-1|\cdot z^4.$$

Kvadriranjem zadnje jednakosti dobivamo

$$(z^2-1)^2=z^8\cdot|z^2-1|^2=z^8\cdot(z^2-1)\cdot(\overline{z}^2-1)=(z^2-1)\cdot(z^6\cdot|z|^4-z^8).$$

Dijeljenjem sa z^2-1 ostaje nam

$$z^2-1=z^6-z^8 \iff 0=z^8-z^6+z^2-1=(z^2-1)\cdot(z^6+1).$$

(Ne "gubimo" rješenja dijeljenjem sa z^2-1 jer $z^2-1\neq 0$ zbog toga što je argument funkcije arg.)
Sva rješenja jednadžbe zadovoljavaju $z^6=-1=\cos(\pi)+i\sin(\pi)$ odnosno

$$z=\cos(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{6})+i\sin(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{6}),\ k\in\{0,1,2,3,4,5\}.$$

Direktnom provjerom vidimo da od navedenih 6 kandidata za rješenja, samo 4 $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}, \frac{\sqrt{3}-i}{2}, \frac{-\sqrt{3}+i}{2} \text{ i } \frac{-\sqrt{3}-i}{2}\right)$ su zaista rješenja polazne jednadžbe, dok i i $-i$ nisu.

Zadatak 3 Odredite (računski i grafički) sve kompleksne brojeve z koji zadovoljavaju

$$|z + 2 + i| = 1 \quad \text{i} \quad |z + 2 - i| = 3.$$

Rješenje 3 Grafičko rješenje: Općenito, za kompleksan broj ω i nenegativan realan broj r, jednadžbom

$$|z - \omega| = r$$

opisani su svi kompleksni brojevi z koji su u kompleksnoj ravnini od ω udaljeni za r, odnosno koji leže na kružnici radijusa r sa središtem u ω.

Zbog navedenog vidimo da jednadžba

$$1 = |z + 2 + 1| = |z - (-2 - i)|$$

opisuje sve kompleksne brojeve koji su od $-2 - i$ udaljeni za 1, a jednadžba

$$3 = |z + 2 - i| = |z - (-2 + i)|$$

opisuje sve kompleksne brojeve koji su od $-2 + i$ udaljeni za 3. Crtajući ove dvije kružnice dobivamo da je jedini kompleksan broj koji se nalazi na obje $-2 - 2i$.

Računsko rješenje: Zapišimo rješenje ovog sustava u obliku $z = x + iy$, gdje su $x, y \in \mathbb{R}$. Sustav sada postaje

$$\begin{cases} 1 = |z + 2 + i|^2 = (x + 2)^2 + (y + 1)^2 \\ 9 = |z + 2 - i|^2 = (x + 2)^2 + (y - 1)^2 \end{cases}.$$

Oduzimanjem druge jednadžbe od prve dobivamo

$$-8 = 4y \implies y = -2$$

te uvrštavanjem $y = -2$ u prvu jednadžbu dobivamo $x = -2$. Ovime smo računski pokazali da je $-2 - 2i$ jedini kandidat za rješenja polaznog sustava, a direktnom provjerom se zaista možemo uvjeriti da to i je rješenje polaznog sustava.

Zadatak 4 Odredite sve kompleksne brojeve z koji zadovoljavaju

(a) $|z| = 1 \quad \text{i} \quad \mathrm{Re}(z^4) = \mathrm{Re}(z^2)$,

(b) $|z| = \frac{1}{2} \quad \text{i} \quad \mathrm{Im}(z^6) = \mathrm{Re}(z^3)$.

Rješenje 4 (a) Zapišemo li $z = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$, dobivamo

$$\cos(4\theta) = \mathrm{Re}(z^4) = \mathrm{Re}(z^2) = \cos(2\theta).$$

Sada imamo

$$\cos(2\theta) = \cos(4\theta) = \cos(2\theta)^2 - \sin(2\theta)^2 = 2\cos(2\theta)^2 - 1,$$

odnosno

$$2\cos(2\theta)^2 - \cos(2\theta) - 1 = 0.$$

Sada znamo da je $\cos(2\theta) \in \{-\frac{1}{2}, 1\}$, tj. $z^2 \in \{1, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}}{2}\}$ te konačno

$$z \in \{-1, 1, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2}\}.$$

Direktnom provjerom možemo vidjeti da su ovo zaista rješenja polazne jednadžbe.

(b) Zapišemo li $z = \frac{1}{2}(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$, dobivamo

$$\frac{1}{2^6}\sin(6\theta) = \mathrm{Im}(z^6) = \mathrm{Re}(z^3) = \frac{1}{2^3}\cos(3\theta).$$

Sada imamo

$$\frac{1}{2^3}\cos(3\theta) = \frac{1}{2^6}\sin(6\theta) = \frac{1}{2^5}\sin(3\theta)\cos(3\theta),$$

odnosno

$$\cos(3\theta)\,(4 - \sin(3\theta)) = 0.$$

To nam daje da je nužno $\cos(3\theta) = 0$, odnosno $3\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \implies \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$. Kandidati za rješenja su $z = \frac{\sqrt{3}+i}{4}, \frac{\sqrt{3}-i}{4}, \frac{-\sqrt{3}+i}{4}, \frac{-\sqrt{3}-i}{4}, -\frac{i}{2}, \frac{i}{2}$ i provjerom se možemo uvjeriti da su to zaista rješenja.

Zadatak 5 Odredite kompleksan broj $a \in \mathbb{C}$ takav da je $z = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ nultočka polinoma

$$P(z) = z^4 + z^3 - 3z^2 - 4z + a.$$

Za tu vrijednost a odredite preostale nultočke polinoma P.

Rješenje 5 Uvrštavanjam $z = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ u jednadžbu

$$0 = z^4 + z^3 - 3z^2 - 4z + a$$

dobivamo da je $a = -4$. Sada, budući da je $P(z)$ polinom s realnim koeficijentima, i da mu je $z_0 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ nultočka, znamo da mu je i $\overline{z_0} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ također nultočka, odnosno da je djeljiv s polinomom $R(z) = (z - \frac{-1+i\sqrt{3}}{2})(z - \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}) = z^2 + z + 1$. Dijeljenjem polinoma sada dobivamo

$$P(z) = (z^2 - 4)(z^2 + z + 1)$$

pa vidimo da su $z = 2$ i $z = -2$ preostale dvije nultočke polinoma $P(z)$.