Matematička analiza 1 - 1. auditorna vježba - RJEŠENJA

Zadatak 1 Neka su A, B i C logički sudovi. Dokažite ili opovrgnite istinitost sljedećih sudova:

(a) $(A \implies B) \iff (\neg A \vee B)$,

(b) $((A \implies B) \wedge (B \implies C)) \implies (A \implies C)$,

(c) $((A \implies B) \wedge (A \implies C)) \implies (B \implies C)$,

(d) $(A \implies (B \wedge C)) \iff ((A \implies B) \wedge (A \implies C))$.

Rješenje 1

(a) Sud je uvijek istinit. Pokazati istinosnom tablicom.
Drugi način:
$$\neg(A \implies B) \equiv A \wedge \neg B$$
pa koristeći De Morganova pravila dobivamo
$$A \implies B \equiv \neg(A \wedge \neg B) \equiv \neg A \vee B.$$

(b) Sud je uvijek istinit. Koristeći (a) i De Morganova pravila pojednostavimo:
$$((A \implies B) \wedge (B \implies C)) \implies (A \implies C) \equiv ((\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee C)) \implies (\neg A \vee C) \equiv$$
$$\neg\left((\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee C)\right) \vee (\neg A \vee C) \equiv \neg(\neg A \vee B) \vee \neg(\neg B \vee C) \vee \neg A \vee C \equiv$$
$$\equiv (A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg C) \vee \neg A \vee C$$
Sada istinosnom tablicom pokažemo da je sud istinit.

(c) Sud nije uvijek istinit. Za $A \equiv F, B \equiv T$ i $C \equiv F$ imamo
$$((A \implies B) \wedge (A \implies C)) \implies (B \implies C) \equiv F.$$
S druge strane, primijetimo da za $A \equiv T, B \equiv T$ i $C \equiv T$ vrijedi
$$((A \implies B) \wedge (A \implies C)) \implies (B \implies C) \equiv T$$
pa vidimo da sud nije uvijek neistinit.

(d) Sud je uvijek istinit.
$$A \implies (B \wedge C) \equiv \neg A \vee (B \wedge C) \equiv (\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee C) \equiv (A \implies B) \wedge (A \implies C).$$

Zadatak 2 Napišite negacije sljedećih sudova te ispitajte njihovu istinitost:

(a) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(x^2 + y < 0)$,

(b) $(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 + y < 0)$,

(c) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})\,(xy > 0 \implies y < 0)$,

(d) $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})\,(xy > 0 \implies y < 0)$.

Rješenje 2

(a) Negacija je $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x^2 + y \geqslant 0)$. Negacija nije istinita. Doista, kada bi postojao takav $x \in \mathbb{R}$, odabirom $y = -1 - x^2$ bismo dobili $x^2 + y = x^2 - 1 - x^2 = -1 < 0$ što pokazuje da negacija nije istinita. Budući da negacija originalnog suda nije istinita, zaključujemo da originalni sud je istinit.

(b) Negacija je $(\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R})(x^2 + y \geqslant 0)$. Pokažimo da originalni sud nije istinit. Doista, kada bi postojao takav $y \in \mathbb{R}$, mogli bismo uzeti $x = \max\{1, |y|\}$ pa imamo dva slučaja:
prvi slučaj $|y| < 1$:

$$x^2 + y \geqslant 1 - |y| > 0$$

i
drugi slučaj $|y| \geqslant 1$:

$$x^2 + y \geqslant |y|^2 - |y| = |y|(|y| - 1) \geqslant 0,$$

no u oba slučaja vrijedi $x^2 + y \geqslant 0$.

Napomena: Primijetimo da ovaj sud naizgled isti sudu iz (a) zadatka, samo je obrnut poredak kvantifikatora. Zaključujemo da je poredak kvantifikatora bitan za istinitost sudova.

(c) Negacija je $(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(xy > 0 \land y \geqslant 0)$. Negacija ovog suda je očito istinita. Uzmimo na primjer $x = y = 1$. Sada vidimo da originalni sud nije istinit.

(d) Negacija je $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(xy > 0 \land y \geqslant 0)$. Pokažimo da je originalni sud istinit. Za to je dovoljno dati primjer $x_0 \in \mathbb{R}$ za koji vrijedi

$$(\forall y \in \mathbb{R})(x_0 y > 0 \implies y < 0).$$

Prvi primjer: $x_0 = -1$.
Sada tvrdnja glasi

$$(\forall y \in \mathbb{R})(-y > 0 \implies y < 0),$$

a to očito vrijedi.

Drugi primjer: $x_0 = 0$.
Tvrdnja sada glasi

$$(\forall y \in \mathbb{R})(0 > 0 \implies y < 0),$$

no ta implikacija je uvijek istinita.

Zadatak 3 Dokažite da za svaki prirodan broj n, 5 dijeli $7^{n+2} + 2 \cdot 12^{n+1} + 2 \cdot (-3)^n$.

Rješenje 3

Baza indukcije za $n = 1$:

Zbog

$$7^3 + 2 \cdot 12^2 + 2 \cdot (-3)^1 = 343 + 288 - 6 = 625$$

vidimo da je baza indukcije zadovoljena.

Korak indukcije: Pretpostavimo da za neki prirodan broj n, $5 \mid 7^{n+2} + 2 \cdot 12^{n+1} + 2 \cdot (-3)^n$. Pokažimo da tada nužno $5 \mid 7^{n+3} + 2 \cdot 12^{n+2} + 2 \cdot (-3)^{n+1}$.

$$\begin{aligned} 7^{n+3} + 2 \cdot 12^{n+2} + 2 \cdot (-3)^{n+1} &= 7 \cdot 7^{n+2} + 12 \cdot 2 \cdot 12^{n+1} - 3 \cdot 2 \cdot (-3)^n = \\ &= \left(5 \cdot 7^{n+2} + 10 \cdot 2 \cdot 12^{n+1} - 5 \cdot 2 \cdot (-3)^n\right) + 2 \cdot \left(7^{n+2} + 2 \cdot 12^{n+1} + 2 \cdot (-3)^n\right) \end{aligned}$$

Broj 5 očito dijeli prvu zagradu, a po pretpostavci indukcije znamo da dijeli i drugu zagradu, pa zaključujemo da dijeli i njihov zbroj, odnosno $7^{n+3} + 2 \cdot 12^{n+2} + 2 \cdot (-3)^{n+1}$.

Ovime je korak indukcije, a i sama indukcija, završen.

Zadatak 4 Matematičkom indukcijom dokažite:

(a) $\sum_{i=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{i}\right) = \ln(n+1)$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

(b) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} \leqslant 2\sqrt{n} - 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Rješenje 4

(a)

Baza indukcije za $n = 1$:

$$\sum_{i=1}^{1} \ln(1+\frac{1}{i}) = \ln(1+1)$$

Korak indukcije:

Pretpostavimo da postoji prirodan broj n takav da vrijedi

$$\sum_{i=1}^{n} \ln(1+\frac{1}{i}) = \ln(n+1).$$

Pokažimo da nužno vrijedi i

$$\sum_{i=1}^{n+1} \ln(1+\frac{1}{i}) = \ln(n+2).$$

Računamo:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \ln(1+\frac{1}{i}) = \ln(1+\frac{1}{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} \ln(1+\frac{1}{i}) = \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) + \ln(n+1) =$$

$$\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\cdot(n+1)\right) = \ln(n+2)$$

(b)

Baza indukcije za $n = 1$:

$$\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{\sqrt{i}} = 1 \leqslant 2\sqrt{1} - 1$$

Korak indukcije:

Pretpostavimo da postoji prirodan broj n takav da vrijedi

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} \leqslant 2\sqrt{n} - 1.$$

Pokažimo da nužno vrijedi i

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{i}} \leqslant 2\sqrt{n+1} - 1.$$

Računamo:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{i}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n+1}} + 2\sqrt{n} - 1$$

pa je dovoljno dokazati da za svaki prirodan broj n vrijedi

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} + 2\sqrt{n} - 1 \leqslant 2\sqrt{n+1} - 1.$$

Doista,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{n+1}} + 2\sqrt{n} - 1 \leqslant 2\sqrt{n+1} - 1 && \iff \\
\frac{1}{\sqrt{n+1}} + 2\sqrt{n} \leqslant 2\sqrt{n+1} && \iff \\
1 + 2\sqrt{n(n+1)} \leqslant 2(n+1) && \iff \\
2\sqrt{n(n+1)} \leqslant 2n+1 && \iff \\
4n(n+1) \leqslant (2n+1)^2 && \iff \\
4n^2 + 4n \leqslant 4n^2 + 4n + 1. &&
\end{aligned}$$

Zadatak 5 Niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ realnih brojeva zadan je s

$$a_1 = 1,\ a_2 = 5$$

i

$$(\forall n \in \mathbb{N})\,(a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n)\,.$$

Dokažite da za svaki prirodan broj n vrijedi

$$a_n = 2^n + (-1)^n.$$

Rješenje 5

Indukcijom pokažimo da za svaki prirodan broj n vrijedi da je $a_n = 2^n + (-1)^n$ i $a_{n+1} = 2^{n+1} + (-1)^{n+1}$.

Napomena: Alternativno možemo dokazivati da za svaki prirodan broj n vrijedi da je $a_k = 2^k + (-1)^k$, za sve $k \in \{1, 2, ..., n\}$.

Baza indukcije za $n = 1$:

$$a_1 = 1 = 2 - 1 = 2^1 + (-1)^1$$

i

$$a_2 = 5 = 4 + 1 = 2^2 + (-1)^2.$$

Korak indukcije:
Pretpostavimo da za neki prirodan broj n vrijedi da je $a_n = 2^n + (-1)^n$ i $a_{n+1} = 2^{n+1} + (-1)^{n+1}$. Pokažimo da nužno vrijedi i da je $a_{n+2} = 2^{n+2} + (-1)^{n+2}$.
Zaista,

$$a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n = 2^{n+1} + (-1)^{n+1} + 2\cdot(2^n + (-1)^n) = \left(2^{n+1} + 2\cdot 2^n\right) + (-1+2)\cdot(-1)^n = 2^{n+2} + (-1)^{n+2}.$$