MATAN 1: SADRŽAJ PRIPREME ZA MEĐUISPIT - PZMI

– zadaci s starih pismenih ispita i njihove varijante –

– 1. dio video snimke su zad. 1 do zad. 4, a 2. dio video snimke su zad. 5 do zad. 8 –

ZADATAK 1. [MI–2015.–Zad.1] Naći sva rješenja $z \in \mathbb{C}$ jednadžbe:

$$\boxed{z^5 - 2z^3 + 2z = 0.}$$

Savjet prije rješavanja: Nakon što se izluči z dobiva se bikvadratna jednadžba $z^4 - 2z^2 + 2 = 0$, koju je moguće svesti na potpuni kvadrat te pomoću dva uzastopna korjena elegentno doći do njena 4 rješenja: $z = \sqrt{1 + \sqrt{-1}}$. 🙂🙂

ZADATAK 2. [DIR–21. rujna 2016.–Zad.2–njegova varijanta] Zadana je funkcija:

$$\boxed{f(x) = 1 - \frac{1}{2}\mathrm{ch}(x-2).}$$

A. Koristeći transformacije nad grafovima, skicirati graf of $f(x)$, odrediti domenu $\mathcal{D}(f)$ te grafički i analitički odrediti njenu sliku $\mathrm{Im}(f)$;

B. Odrediti A na kome je $f : A \to \mathrm{Im}(f)$ bijekcija, te potom naći njenu inverznu funkciju $f^{-1}(x)$;

C. Izvesti formulu za $\mathrm{Arch}(x)$ te je uvrstiti u $f^{-1}(x)$ dobivenu pod **C.**;

D. Izračunati derivaciju od $f^{-1}(x)$ isključivo koristeći derivaciju od $f(x)$.

ZADATAK 3. [DIR–17. rujna 2019.–Zad.3b)–5 bodova] Za niz zadan rekurzivno formulom

$$\boxed{a_{n+1} = \frac{2a_n + 1}{5}, \quad a_1 = \frac{1}{5},}$$

pokažite da je konvergentan i odredite mu limes.

Savjeti prije rješavanja:

• **[Monotonost od a_n]** SAVJET 1: *Jako je važno pomoću nekoliko prvih članova ovog niza, a to su: a_1, a_2, a_3 itd, točno naslutiti je li ovo rastući ili padajući.* Zašto? Pokazat ćemo na PPZM-u da za ovaj niz vrijedi nešto suludo:

$$\text{ako je } a_n < a_{n+1} \text{ za neki } n \in \mathbb{N}, \text{ tada je } a_{n+1} < a_{n+2},$$
$$\text{ako je } a_n > a_{n+1} \text{ za neki } n \in \mathbb{N}, \text{ tada je } a_{n+1} > a_{n+2}.$$ 🙂

SAVJET 2: *Ako niste sigurni u izračun a_1, a_2 i a_3, onda za preliminarno naslučivanje je li ovo rastući ili padajući niz možete za sebe u ovom slučaju koristiti sljedeći trik, koji će biti dokazan* *na PPZM-u*: ako rekurziju možemo napisati u obliku $a_{n+1} = f(a_n)$, $n \in \mathbb{N}$ te ako je funkcija $y = f(x)$ neprekinuta i rastuća, tada je i niz a_n rastući. U ovom slučaju je:

$$f(x) = \frac{2x+1}{5},$$

rastuća, pa preliminarno zaključujemo da je niz a_n rastući i to bez računanja prvih nekoliko članova niza a_n

• **[Omeđenost od a_n]** Prije dokaza matematičkom indukcijom da je niz a_n omeđen odozgo (budući da raste lako ga je omeđiti odozdo, npr. $a_n \geq 0$), potrebno je odrediti barem jednu gornju među za a_n odnosno broj M takav da je $a_n \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$. SAVJET 3: *Ako ne želite previše pogađati što je M možete ga otkriti ako pređete na 3. korak od rješavanja ovog zadatka, a to je: pretpostavite da je a_n pa stoga možete preći na limes u gornjoj rekurziji iz čega dobivate da je*:

$$L = \frac{2L+1}{5} \quad \text{iz čega slijedi da je} \quad L = \frac{1}{3},$$

pa možemo za M uzeti bilo koji broj veći ili jednak od $1/3$, na primjer $M = 1$ i nastaviti s dokazom omeđenosti odozgo za a_n. Detalji na PPZM-u.

<u>ZADATAK 4</u>. [JIR−24. kolovoza 2020.−varijanta Zad.4.a)−4 boda]

A. Odrediti $a \in \mathbb{R}$ takav da je funkcija $f : [-1, 4] \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 \leq x \leq 1, \\ ax, & 1 < x \leq 4. \end{cases}$$

neprekinuta. Pokazati da $f(x)$ nije diferencijabilna u $x = 1$ za svaki $a \in \mathbb{R}$.

B. Odrediti $a, b \in \mathbb{R}$ takve da je funkcija $f : [-1, 4] \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 \leq x \leq 1, \\ ax + b, & 1 < x \leq 4. \end{cases}$$

neprekinuta i diferencijabilna u $x = 1$.

<u>ZADATAK 5</u>. [nadopuna zadatku 4]

Dokazati tvrdnje:

• "ako je $f(x)$ diferencijabilna u $x = x_0$, tada je $f(x)$ neprekinuta u $x = x_0$."

• "ako je $f(x)$ prekidna u $x = x_0$, tada $f(x)$ nije diferencijabilna $x = x_0$."

Promatramo funkciju iz Zadatka 4. A. specijalno za a=2:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 \leq x \leq 1, \\ 2x, & 1 < x \leq 4. \end{cases}$$

Za nju znamo da je:

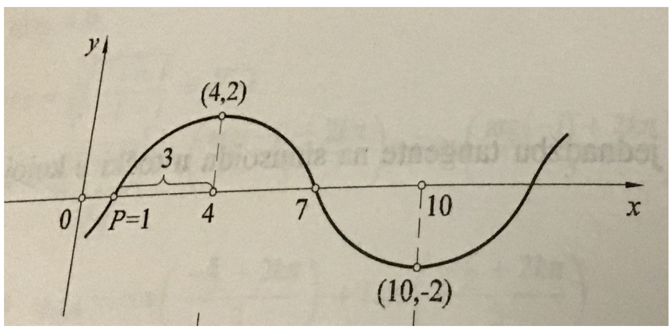
$$f(x) \text{ je prekidna u } x = 1 \text{ i } \quad \lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} f'(x).$$

Kako je ovo moguće? Detalji odgovora na ovo pitanje će biti dani na PPMZ-u. 🙂

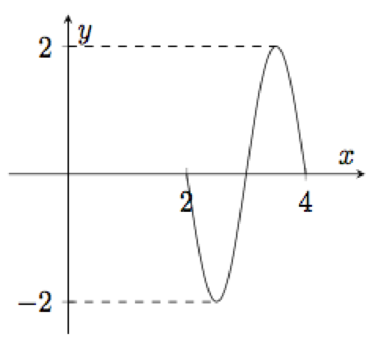
Zadatak 6. [Ispit iz 2001., JIR−3. rujna 2020.−Zad.2.a)−3 boda] Kako sa slike zadane sinusoide pronaći formulu za funkciju:

$$\boxed{y(x) = A\sin(\omega x + \phi)?}$$

Na primjer, na jednom ispitu iz 2001. godine se pojavila fotka sinusoide (bile su zadane samo točke $(4, 2)$ i $(10, -2)$ dok su brojevi 1 i 7 naknadno određeni u postupku):



Dok se na drugom jesenskom ispitu 2020. pojavila fotka sinusoide :



Savjet prije rješavanja: Na PZMI-u ćemo pokazati da se lako iz grafa bilo koje sinusoide može pronaći tražena formula u obliku $y(x) = A\sin(\omega(x - x_0))$.

<u>ZADATAK 7</u>. Zašto

$$\lim_{x\to 1} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 \quad \text{postoji, ALI} \quad \lim_{x\to 1} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{x-1}\right) \quad \text{ne postoji?}$$

<u>ZADATAK 8</u>. A. Pokazati da je:

$$\lim_{x\to+\infty} \left[\ln\left(\operatorname{ch}(x+3)\right) - x\right] = 3 - \ln 2 \quad \text{i} \quad \lim_{x\to-\infty} \left[\ln\left(\operatorname{ch}(x+3)\right) + x\right] = -3 - \ln 2.$$

Potom napisati desnu $y = k_1 x + l_1$ i lijevu $y = k_2 x + l_2$ kosu asimptotu funkcije:

$$f(x) = \ln\left(\operatorname{ch}(x+3)\right)$$

ako se zna da je $k_1 = 1$ i $k_2 = -1$

B. Izračunati $g'(x)$ i $g'(-3)$ gdje je $g(x) = (x^2+1)^{f(x)}$ i $f(x)$ kao u A. dijelu zadatka.

Zadaci će biti rješavani uz sve potrebne detalje na odgovarajuća dva video predavanja.