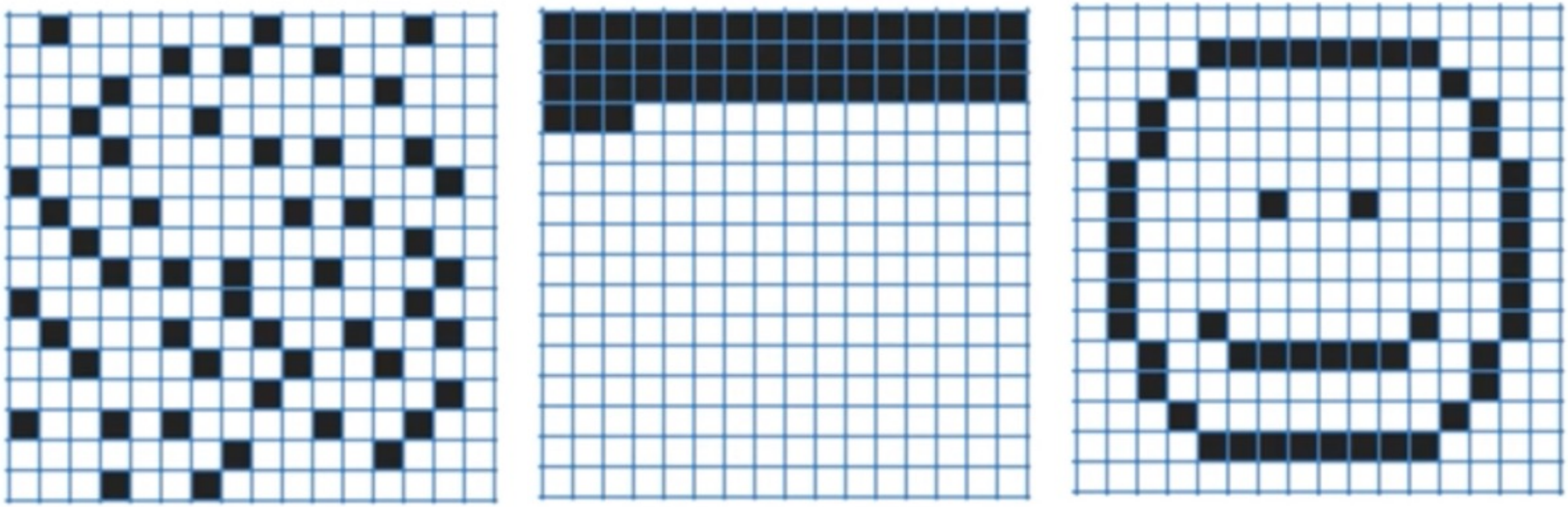
Teorija informacije

Dario Bojanjac

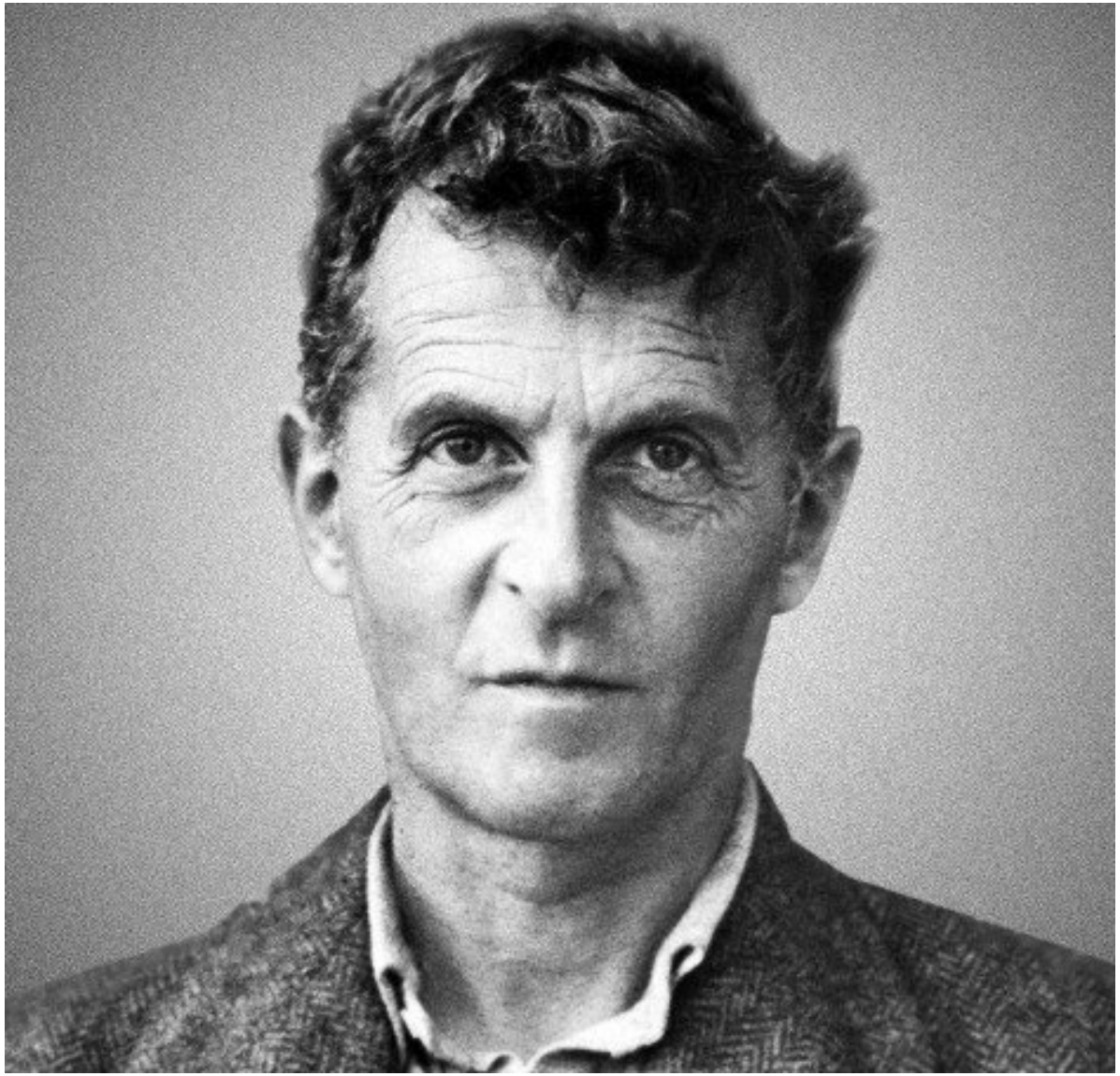
Informacija



Explanimator: [What is information?](), 11. svibnja 2016.

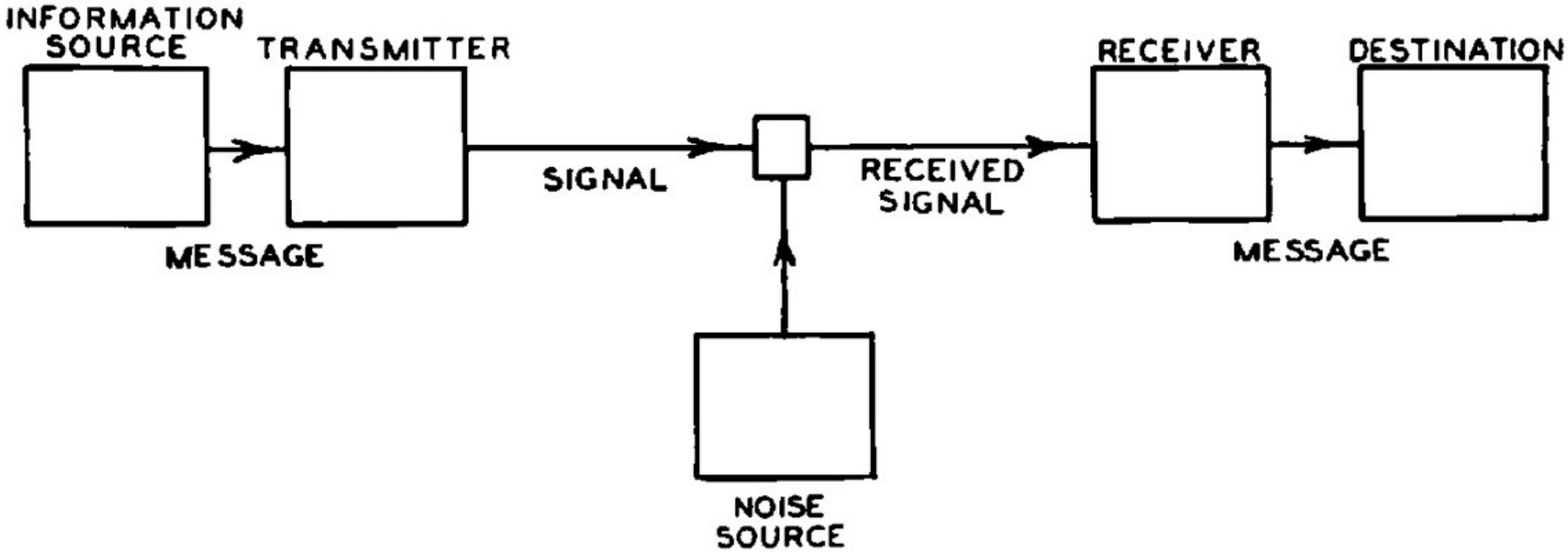
Informacija u narodu

Informacija se u govornom jeziku koristi kao apstraktna imenica koja označava bilo koju količinu podataka, kod, tekst koji je spremljen na računalu/papiru/kamenu ili se šalje/prima/manipulira u bilo kojem obliku ili mediju.



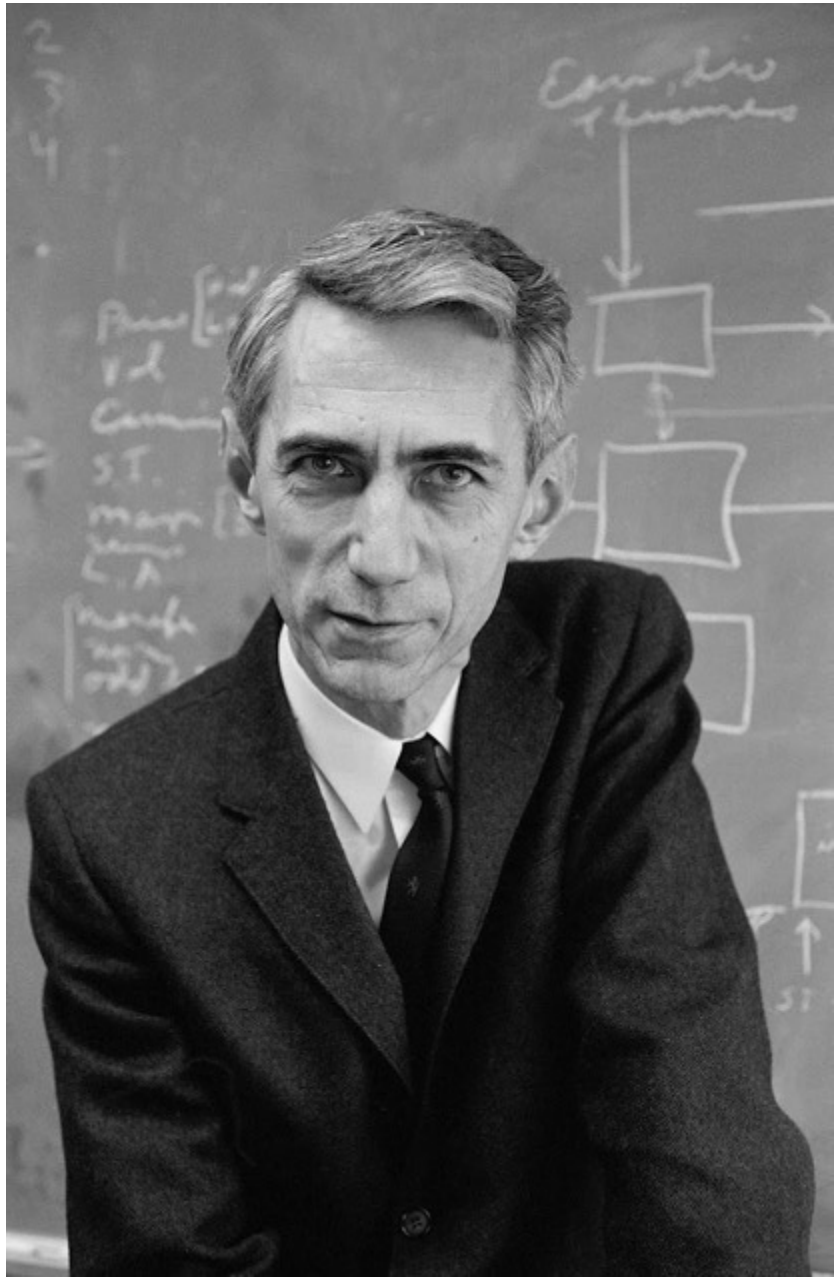
What we cannot speak about clearly we must pass over in silence.

Ludwig Wittgenstein, 1889. – 1951.


INFORMATION SOURCE
TRANSMITTER
SIGNAL
RECEIVED SIGNAL
RECEIVER
DESTINATION
MESSAGE
MESSAGE
NOISE SOURCE

The fundamental problem of communication is that of reproducing at one point either exactly or approximately a message selected at another point. Frequently the messages have meaning.

Claude Shannon, 1916. – 2001.



The Bell System Technical Journal

Vol. XXVII *July, 1948* *No. 3*

A Mathematical Theory of Communication

By C. E. SHANNON

Introduction

THE recent development of various methods of modulation such as PCM and PPM which exchange bandwidth for signal-to-noise ratio has intensified the interest in a general theory of communication. A basis for such a theory is contained in the important papers of Nyquist[1] and Hartley[2] on this subject. In the present paper we will extend the theory to include a number of new factors, in particular the effect of noise in the channel, and the savings possible due to the statistical structure of the original message and due to the nature of the final destination of the information.

David Tse: [How Claude Shannon Invented the Future](), Quanta magazine, December 22, 2020

Kako filozofija vidi informaciju?

Dva osnovna svojstva

- Informacija je ekstenzivna.
- Matematički opis ekstenzivnosti koristi logaritamsku funkciju.

- Informacija smanjuje neizvjesnost.
- Količina informacije koju smo primili raste linearno za istu vrijednost za koju ta primljena informacija smanjuje naše neznanje.
- David Hume je prvi uočio da izbor iz većeg skupa mogućnosti nosi više informacije.

Različiti pokušaji formaliziranja informacije

- Nyquistova funkcija (1924.)
- Fisherova informacija (1925.)
- Hartleyeva funkcija (1928.)
- Shannonova informacija (1948.)
- Kolmogorovljeva kompleksnost (Turing 1937., Kolmogorov 1965.)
- Tsalisova i Renyeva entropija (1988. i 1961.)

Što je potrebno za razumijevanje informacije?

(bit, logaritam i entropija)

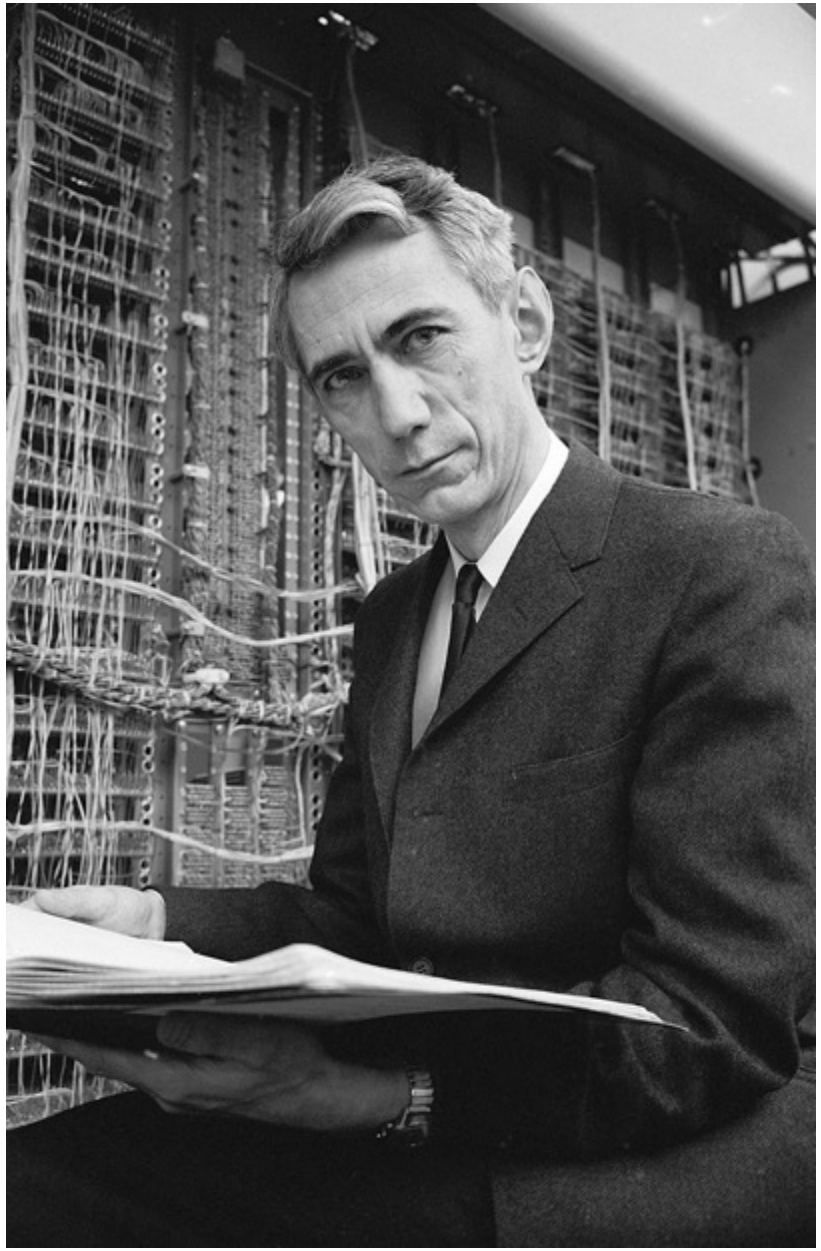
If people do not believe that mathematics is simple, it is only because they do not realize how complicated life is.

John von Neumann, 1903. – 1957.

Binarni brojevni sustav

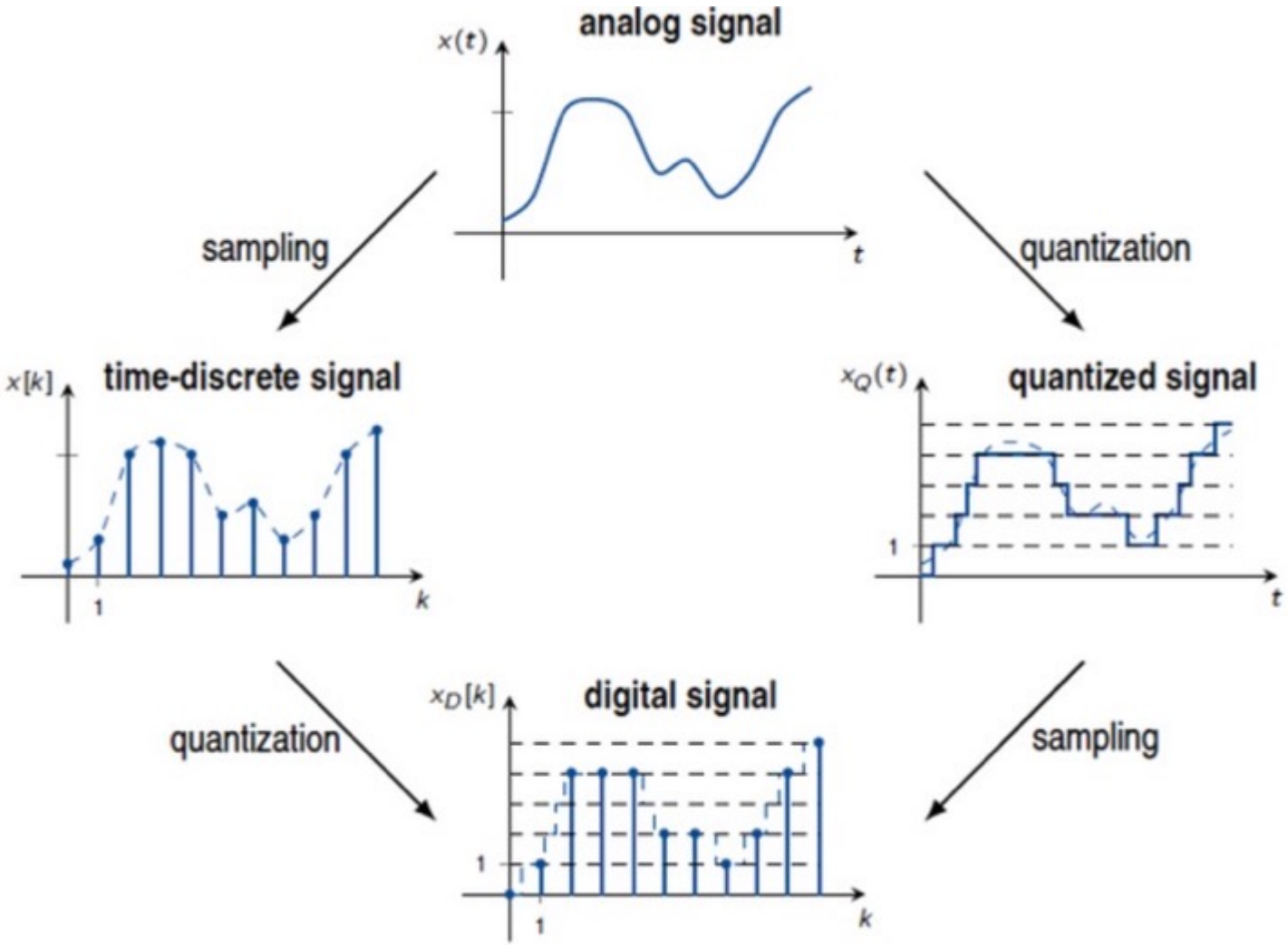
Zašto baza 2 ako imamo 10 prstiju?

- U dekadskom brojevnom sustavu koristimo znamenke 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9.
- U binarnom brojevnom sustavu koristimo znamenke 0 i 1.
- Broj 2 u binarnom brojevnom sustavu pišemo kao?
- Pogodan za zapis informacije u računalu (on/off).
- Bit = binary digit.



Kako spremiti pjesmu u računalo?

- Diskretizacija
- Kvantizacija



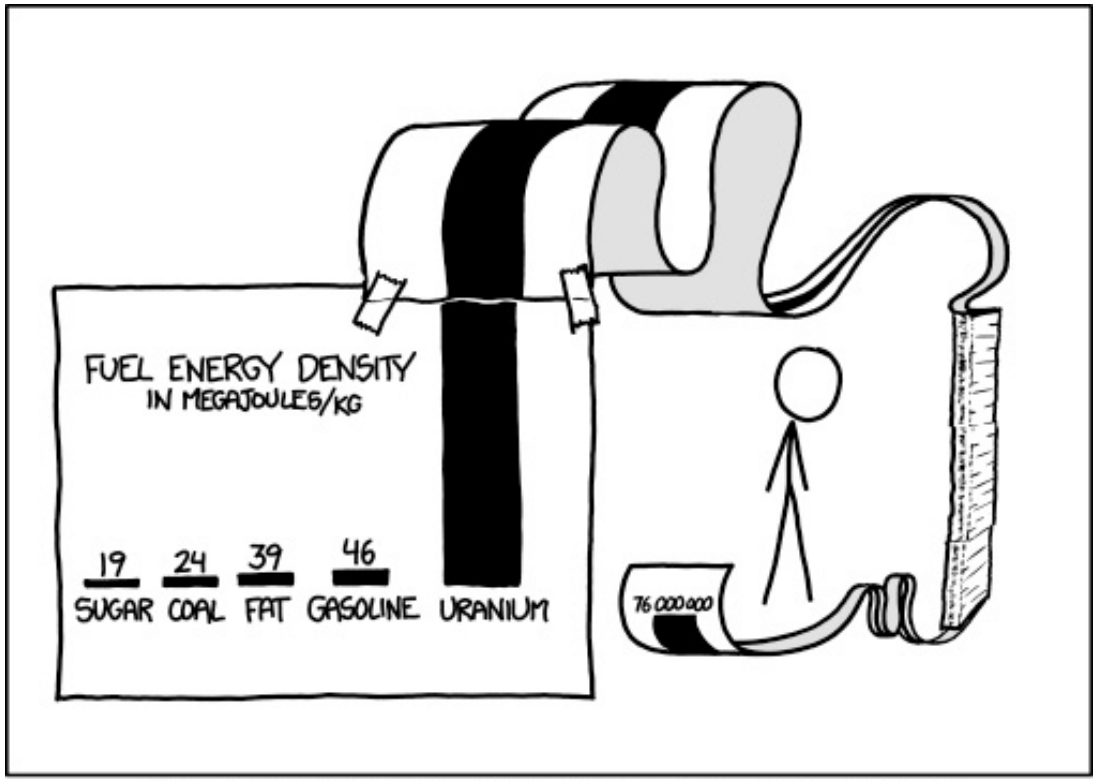
Logaritam

Tko se boji logaritma još?

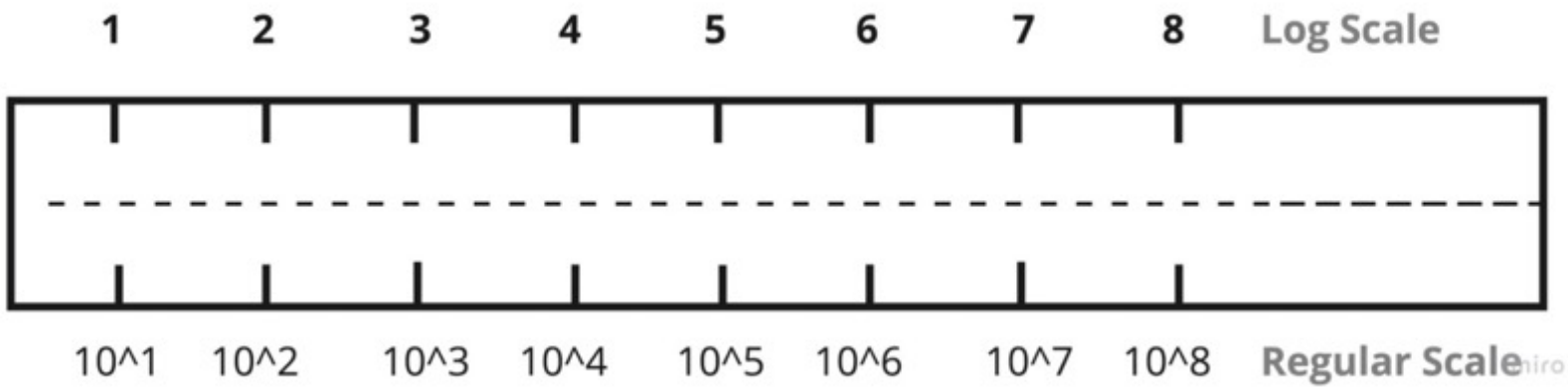
- Logaritam daje odgovor na pitanje koliko puta množimo neki broj (baza) da bismo dobili neki drugi broj.
- Logaritam po bazi 2 od 16 je 4, a logaritam po bazi 4 od 16 je 2 (16=2*2*2*2=4*4).
- Logaritam je riječ koju je izmislio John Napier (1550-1617).
- Grčki logos znači riječ, proporcija ili omjer, a arithmos znači broj.
- Logaritam je omjerbroj

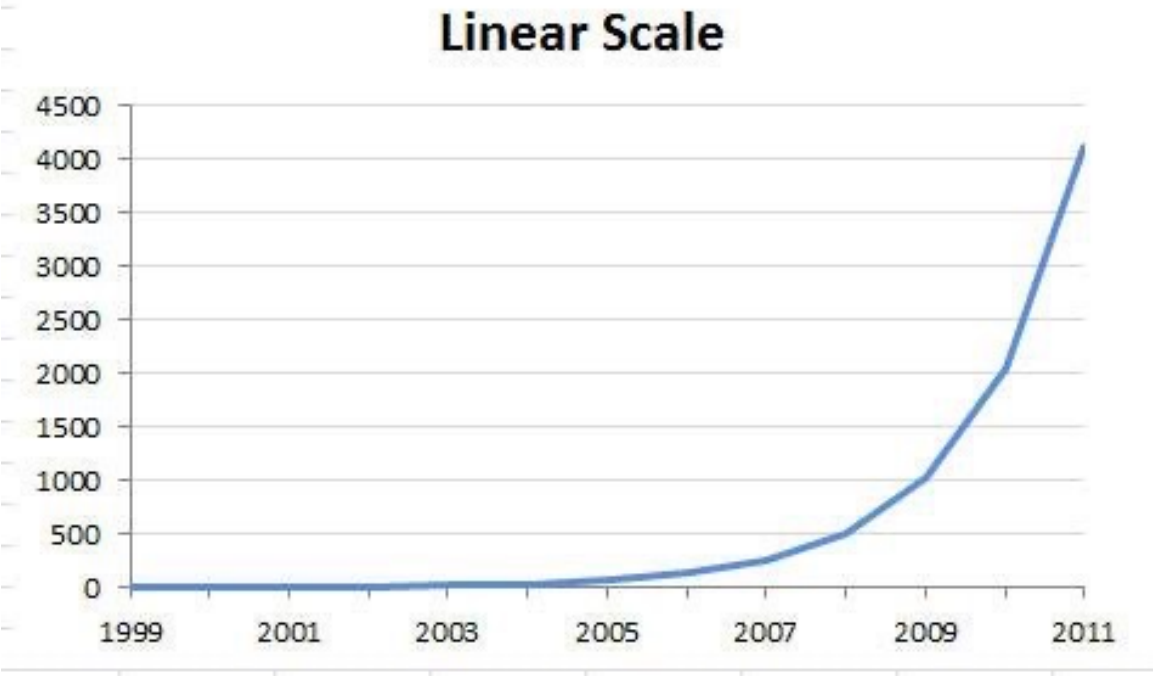
Čemu služi logaritam?

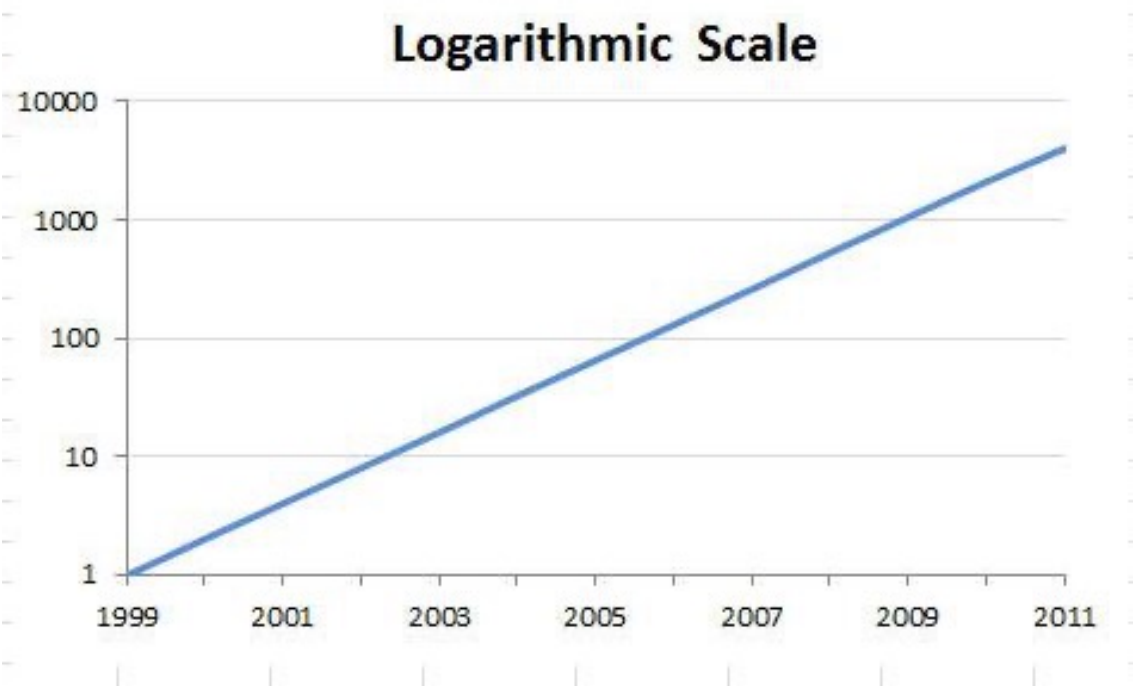
- Logaritam po bazi 10 nekog broja kaže nam koliko znamenki ima taj broj.
- Logaritam po bazi 2 nekog broja kaže nam koliko bitova trebamo koristiti da bismo zapisali taj broj u računalu.



SCIENCE TIP: LOG SCALES ARE FOR QUITTERS WHO CAN'T FIND ENOUGH PAPER TO MAKE THEIR POINT *PROPERLY.*



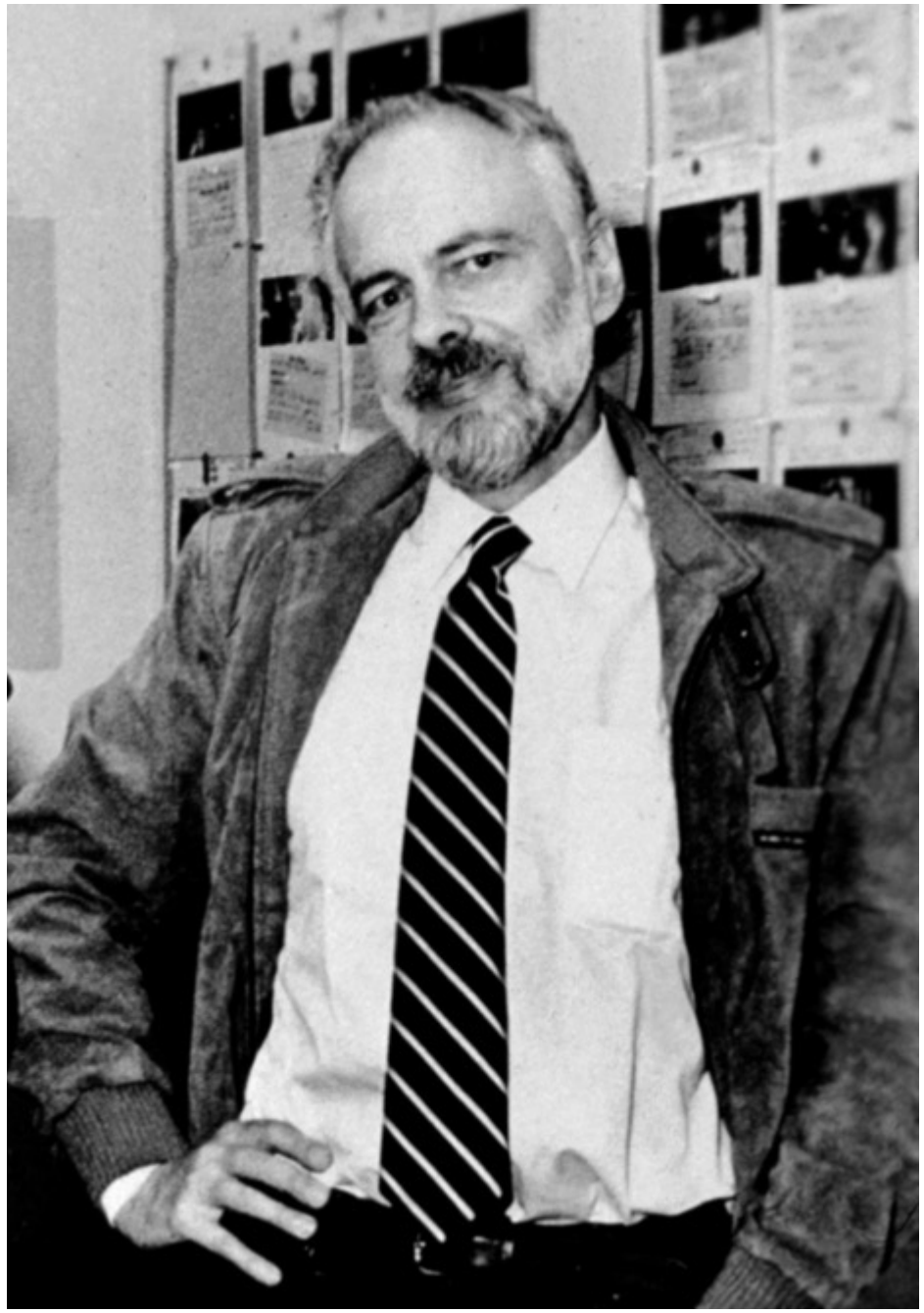

Linear Scale
4500
4000
3500
3000
2500
2000
1500
1000
500
0
1999
2001
2003
2005
2007
2009
2011


Logarithmic Scale
10000
1000
100
10
1
1999
2001
2003
2005
2007
2009
2011

Entropija

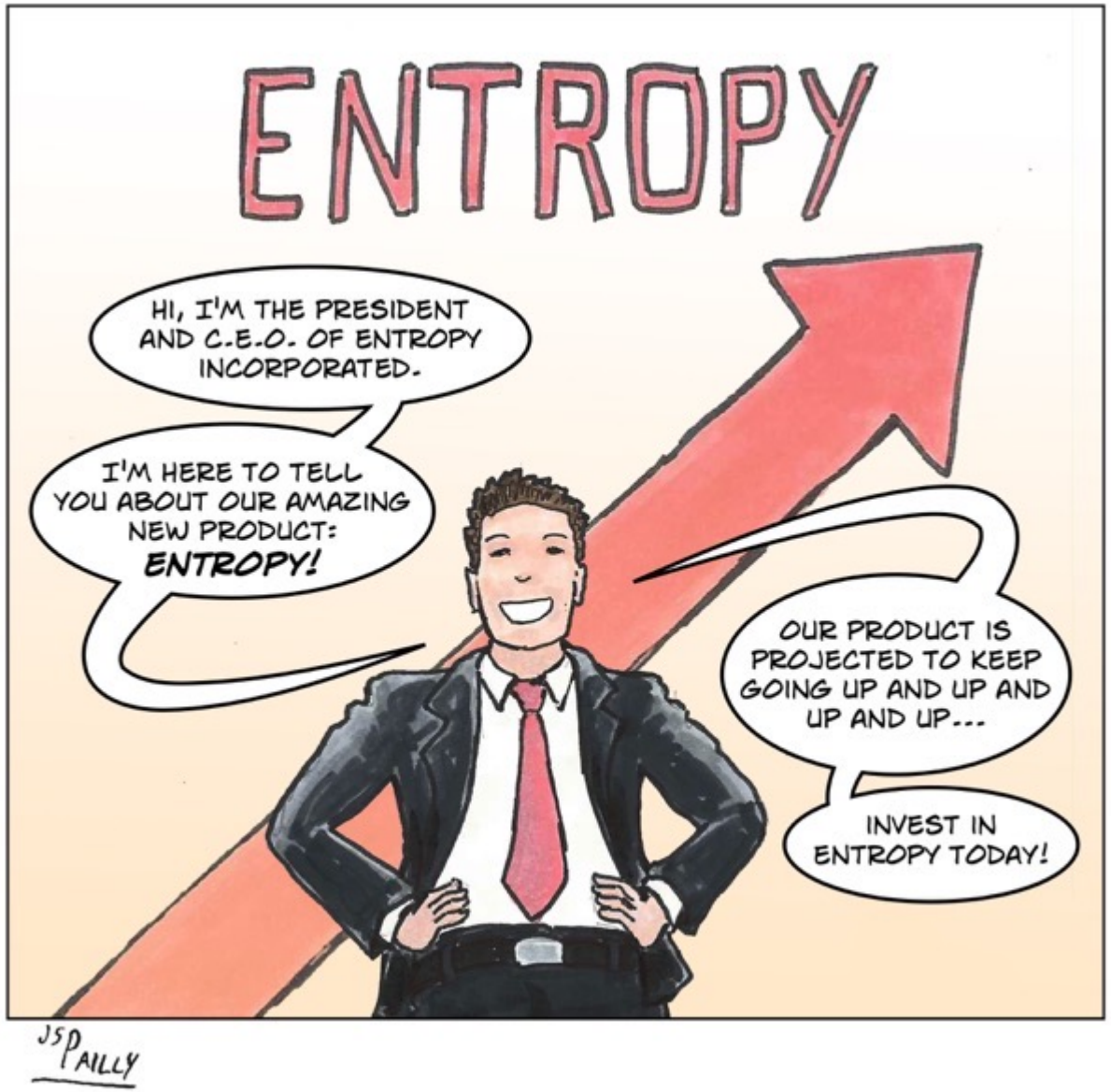
Što je entropija?

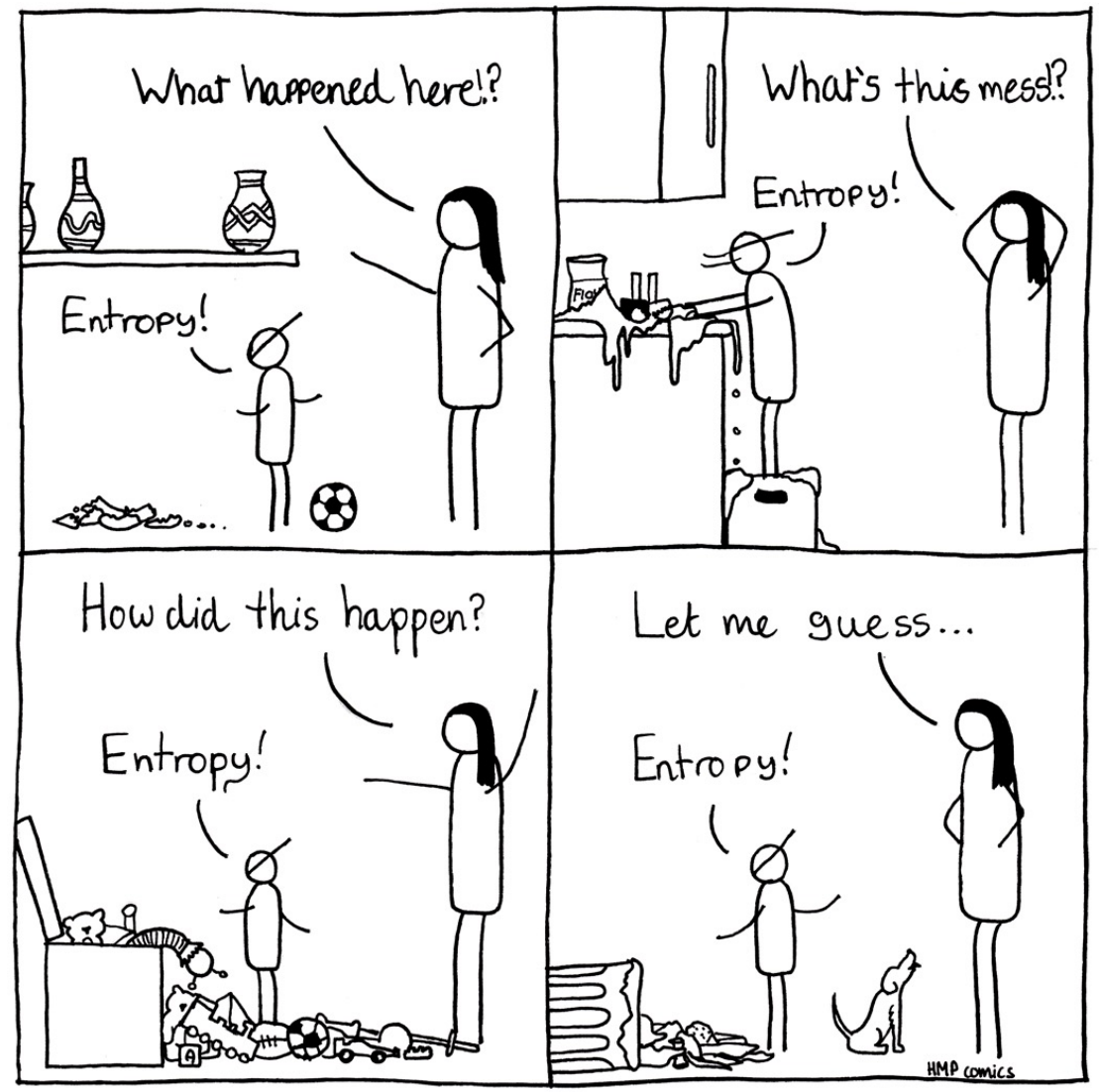
- Seth Lloyd: Nothing in life is certain except death, taxes, and the second law of thermodynamics.
- Vaclav Havel: Just as the constant increase of entropy is the basic law of the universe, so it is the basic law of life to be ever more highly structured and to struggle against entropy.
- Elon Musk: I think you should always bear in mind that entropy is not on your side.
- Stephen Hawking: You may see a cup of tea fall off a table and break into pieces on the floor... But you will never see the cup gather itself back together and jump back on the table. The increase of disorder, or entropy, is what distinguishes the past from the future, giving a direction to time.



No structure, even an artificial one, enjoys the process of entropy. It is the ultimate fate of everything, and everything resists it.

Philip K. Dick, 1928. – 1982.





This is why we don't teach our children about entropy until much later...

Od kada je entropija?

- 1855. Rudolf Clausius, klasična entropija.
- 1870. Ludwig Boltzmann, statistička fizika, entropija.
- 1948. Calude Shannon, teorija informacije, entropija informacije.

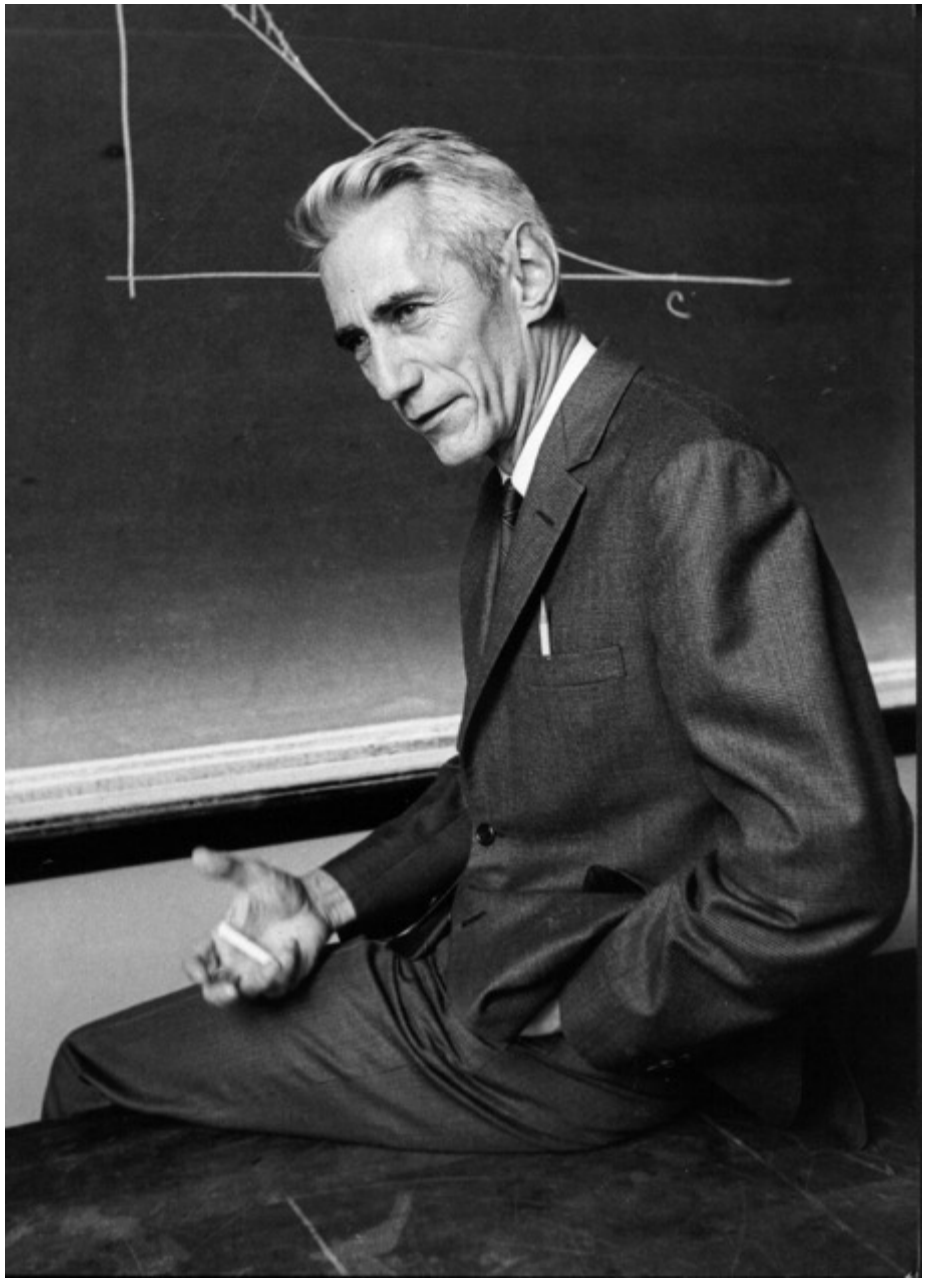
Thermodynamics, correctly interpreted, does not just allow Darwinian evolution; it favors it.

Ludwig Boltzmann, 1844. – 1906.

Kako Shannon vidi informaciju?

Information is the resolution of uncertainty.

Claude Shannon, 1916. – 2001.



Što je informacija po Shannonu?

- Shannon informaciju shvaća kao mjeru neodređenosti (Shannonova informacija).
- Što određeno saznanje više smanji naše neznanje to je informacijski saržaj toga saznanja veći.
- Broj 4, 5, 11, 13, 15, 17, 29 će dobiti na sljedećem izvlačenju lota7.
- Broj 4, 5, 11, 13, 15, 17, 29 neće dobiti na sljedećem izvlačenju lota7.

Shannonovi postulati

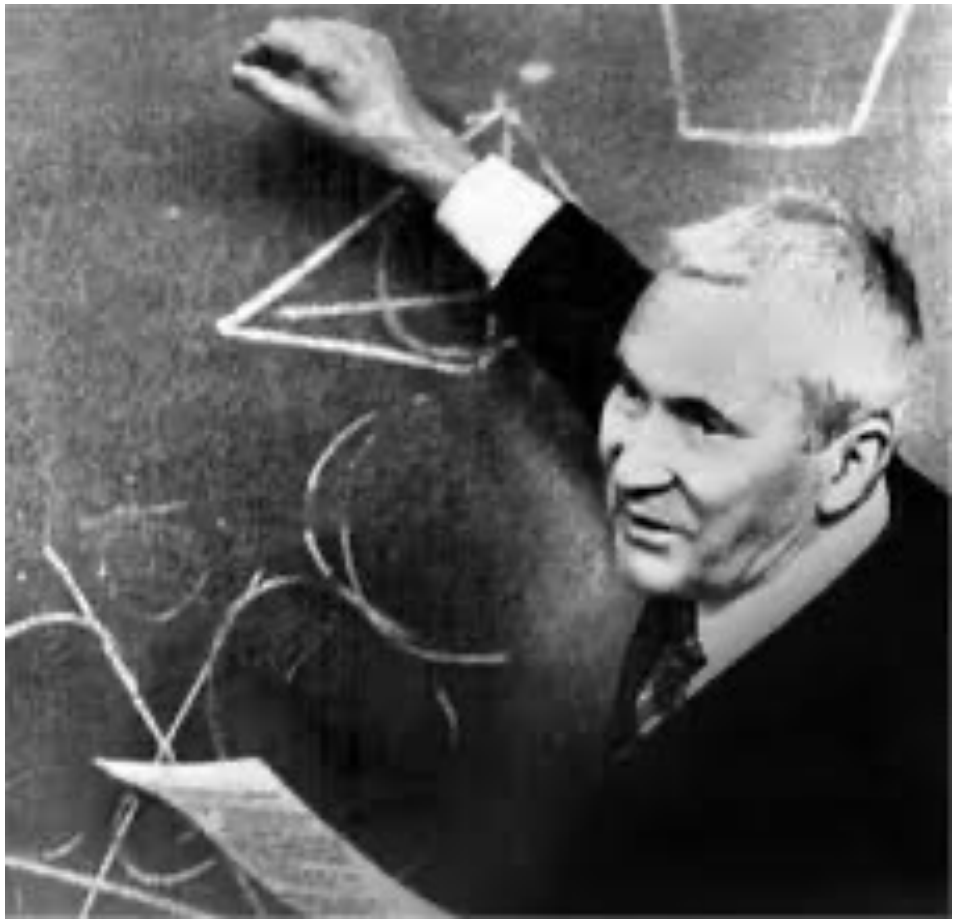
- Mjera informacije (h) proporcionalna je iznenađenju.
- Mjera informacije nekog događaja neprekidno ovisi o vjerojatnosti (p) tog događaja.
- Mjera informacije dva neovisna događaja jednaka je zbroju njihovih mjera informacije.

- Na temelju Shannonovih postulata možemo doći do funkcije $h = -\log_2 p$ koja mjeri količinu informacije.

Kolomogorovljevi aksiomi vjerojatnosti

- Vjerojatnost događaja je pozitivna.
- Vjerojatnost unije svih elementarnih događaja iznosi 1.
- Vjerojatnost unije dva neovisna događaja jednaka je zbroju njihovih vjerojatnosti.

- Vjerojatnost označavamo s P.



Primjeri

- Mjera informacije da padne P (ili G) na simetričnom novčiću iznosi 1 bit.
- Ako imamo nesimetričan novčić (recimo da P pada 80% puta, a G pada 20% puta),

- Mjera informacije da padne 3 na simetričnoj šesterostranoj kocki iznosi 2.58 bit.

Primjeri

- Mjera informacije da padne P (ili G) na simetričnom novčiću iznosi 1 bit.
- Ako imamo nesimetričan novčić (recimo da P pada 80% puta, a G pada 20% puta), $h(P) = 0.32$ bit, a $h(G) = 2.32$ bit.
- Mjera informacije da padne 3 na simetričnoj šesterostranoj kocki iznosi 2.58 bit.

Entropija informacije

- Shannon kaže kako izmjeriti informacijski sadržaj neke informacije.
- Ne zanima nas informacijski sadržaj jedne poruke nego prosječan informacijski sadržaj puno poruka.
- Cijeli govor, hrvatski jezik, svi mogući brojevi koje možemo zapisati u računalo, bacimo simetrični novčić milijun puta, digitalizacija nekog romana, loto, rulet...

$$H = -\sum_{i}^{N} p_i \log_2 p_i$$

Entropija informacije

- Logaritam po bazi 2 nekog broja kaže nam koliko bitova trebamo koristiti da bismo zapisali taj broj u računalu.
- Entropija informacije kaže nam koliko prosječno bitova po simbolu trebamo da bismo zapisali sve moguće simbole iz skupa simbola koji promatramo u računalo.
- Izražava se u bit/simbol.

$$H = -\sum_{i}^{N} p_i \log_2 p_i$$

You should call it entropy. No one knows what entropy really is, so in a debate you will always have the advantage.

John von Neumann, 1903. – 1957.

Entropija informacije

- Najveću moguću entropiju postiže skup u kojem su svi mogući ishodi/simboli jednako vjerojatni.
- Simetričan novčić ima entropiju *H* = 1 bit/simbol.
- Nesimetričan novčić (P pada 80% puta, a G pada 20% puta), ima entropiju *H* = 0.72 bit/simbol.

$$H = -\sum_{i}^{N} p_i \log_2 p_i$$

$$H = \log_2 N$$

Entropija informacije

- Simetrična kocka ima entropiju 2.58 bit/simbol
- Nesimetrična kocka na kojoj npr. padaju samo 1 i 4 ima entropiju od 1 bit/simbol.
- Nesimetrična kocka na kojoj npr. padaju samo 1,2, 4 i 6 ima entropiju od 2 bit/simbol.

$$H = -\sum_{i}^{N} p_i \log_2 p_i$$

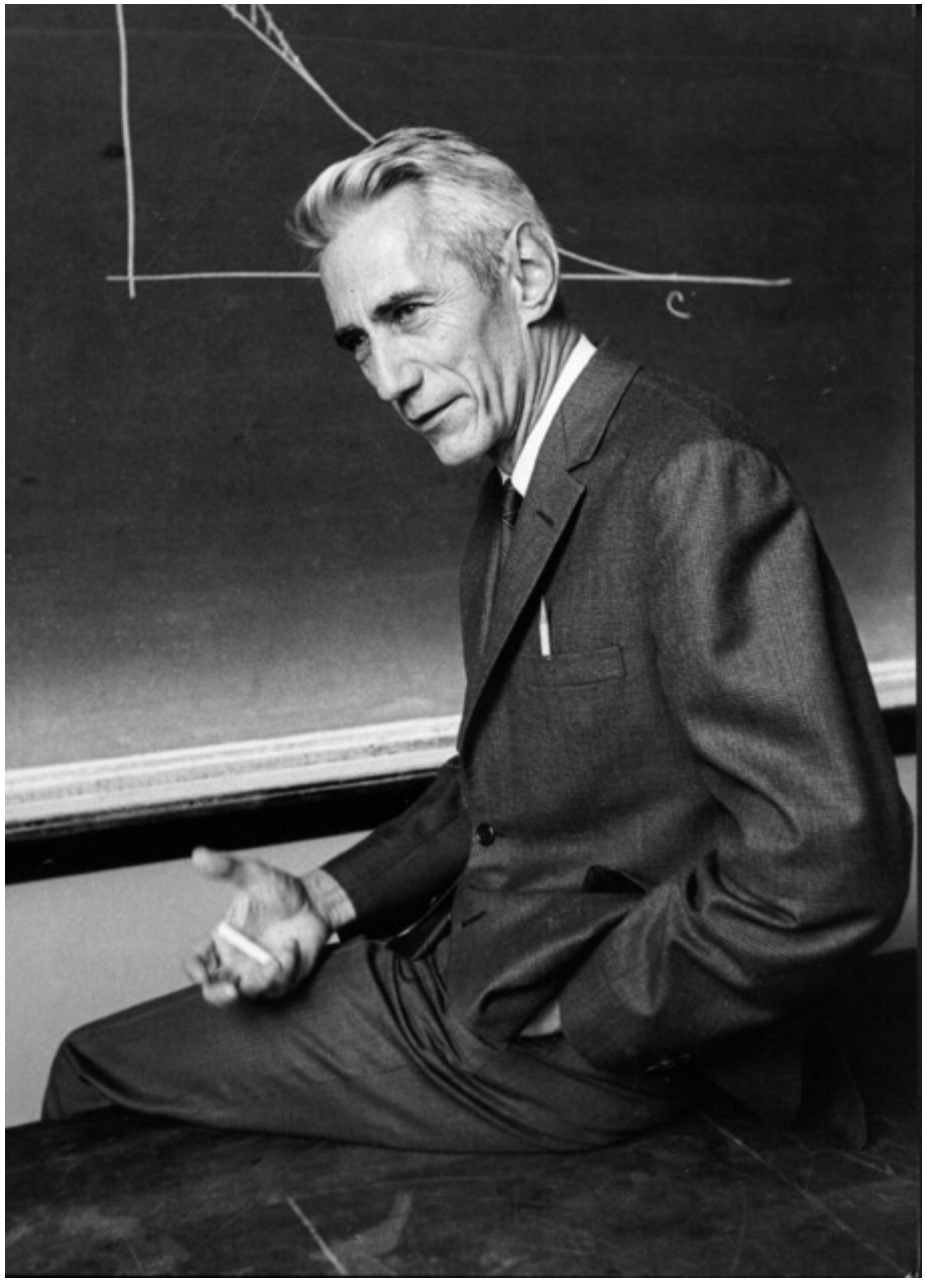
$$H = \log_2 N$$

Problem 12 kuglica

- Od 12 kuglica 11 ih ima jednaku masu, a jedna je ili lakša ili teža.
- Imamo i vagu.
- U koliko minimalno vaganja možemo odrediti koja je to kuglica?
- Koji bi bio vaš prvi korak?

Information is the resolution of uncertainty.

Claude Shannon, 1916. – 2001.



Što je informacija po Shannonu?

- Shannon informaciju shvaća kao mjeru neodređenosti (Shannonova informacija)
- Što određeno saznanje više smanji naše neznanje to je informacijski saržaj toga saznanja veći.
- Broj 4, 5, 11, 13, 15, 17, 29 će dobiti na sljedećem izvlačenju lota7.
- Broj 4, 5, 11, 13, 15, 17, 29 neće dobiti na sljedećem izvlačenju lota7.

Problem 12 kuglica

- Od 12 kuglica 11 ih ima jednaku masu, a jedna je ili lakša ili teža.
- Imamo i vagu.
- U koliko minimalno vaganja možemo odrediti koja je to kuglica?
- Koji bi bio vaš prvi korak?

Problem 12 kuglica

- Od 12 kuglica 11 ih ima jednaku masu, a jedna je ili lakša ili teža.
- Imamo i vagu.
- U koliko minimalno vaganja možemo odrediti koja je to kuglica?
- Koji bi bio vaš prvi korak?

- 6 vs 6 daje 1 bit/simbol.
- 5 vs 5 daje 1.48 bit/simbol.
- 4 vs 4 daje 1.58 bit/simbol.
- 3 vs 3 daje 1.5 bit/simbol.
- 2 vs 2 daje 1.25 bit/simbol.
- 1 vs 1 daje 0.82 bit/simbol.

Kod, kodiranje i najbolje moguće kodiranje

- Kod je skup simbola kojim predstavljamo neke elementarne ishode.
- Recimo da P predstavimo s 1, a G s 0. Tada možemo kodirati skup ishoda bacanja kocke PPPGGGPP kao 11100011.
- U stvarnosti kodiramo slova, cijele tekstove, slike, glazbu i sve ostalo što zapisujemo u računalo.
- U računalo zapisujemo kodove (brojeve), a ne ishode (slika, tekst,…).

$$\text{entropija } H \leq \begin{array}{c}\text{prosječna duljina} \\ \text{kodne riječi}\end{array}$$

Boltzmannova formula (Boltzmann-Planck)

- Broj mikrostanja sustava koji odgovaraju određenom makrostanju.
- Veza između entropije i broja stanja na koja se atomi ili molekule nekog sustava mogu presložiti, a da sustav i dalje ostane u istom stanju.

$$S = k_B \ln W$$

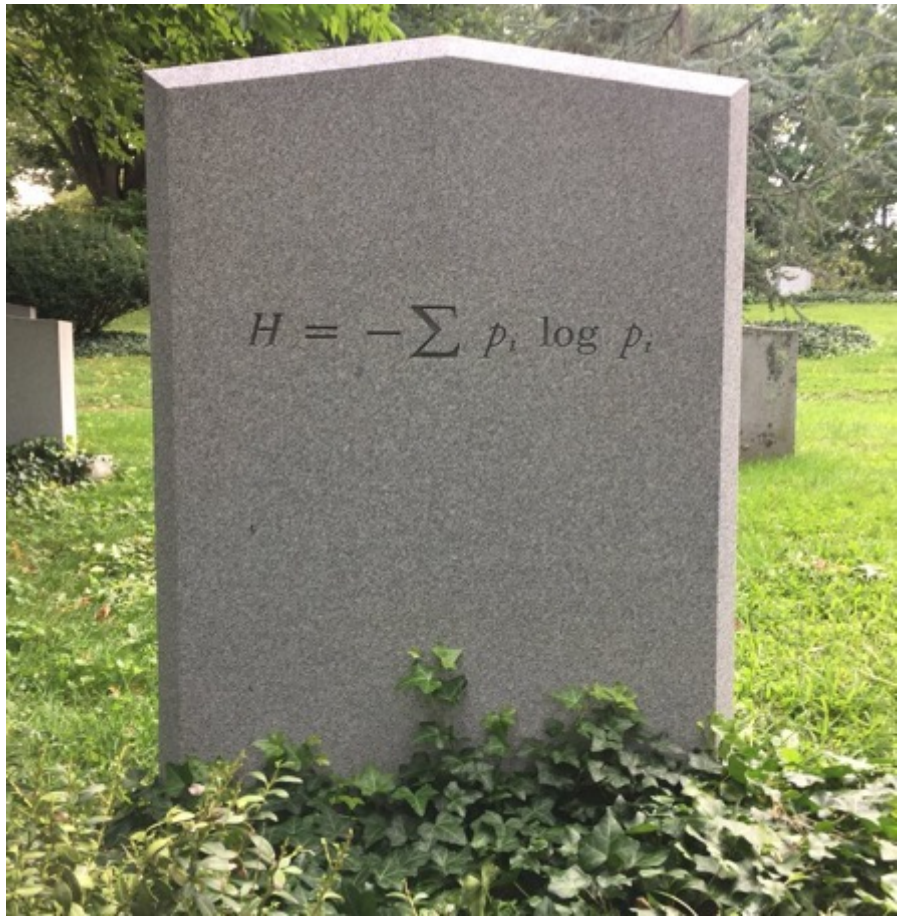
$$H = -\sum_{i}^{N} p_i \log_2 p_i$$

$$H = \log_2 N$$

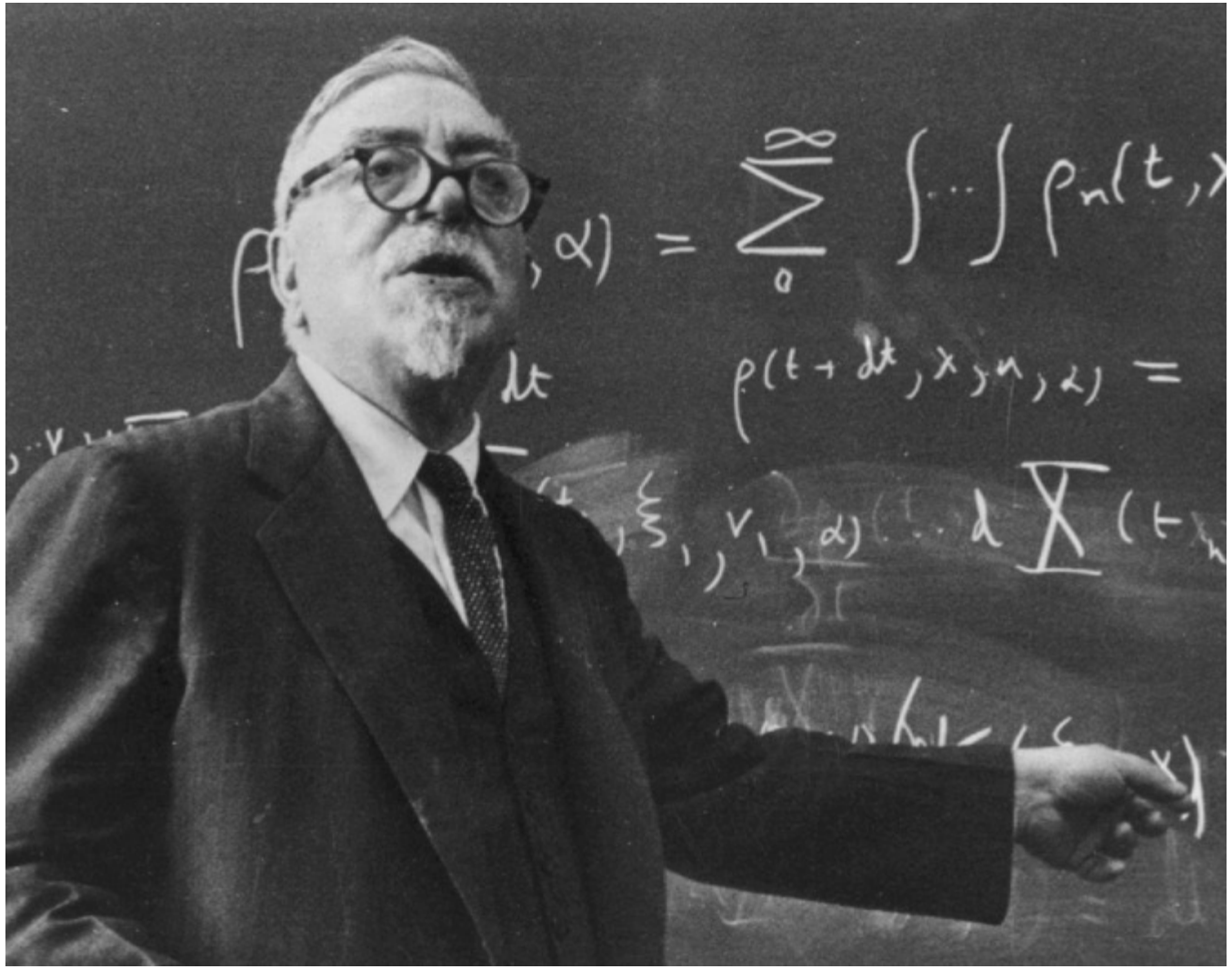
For Wiener, entropy was a measure of disorder; for Shannon, of uncertainty. Fundamentally, as they were realizing, these were the same.

James Gleick, 1954.

$$S = k_B \ln W$$



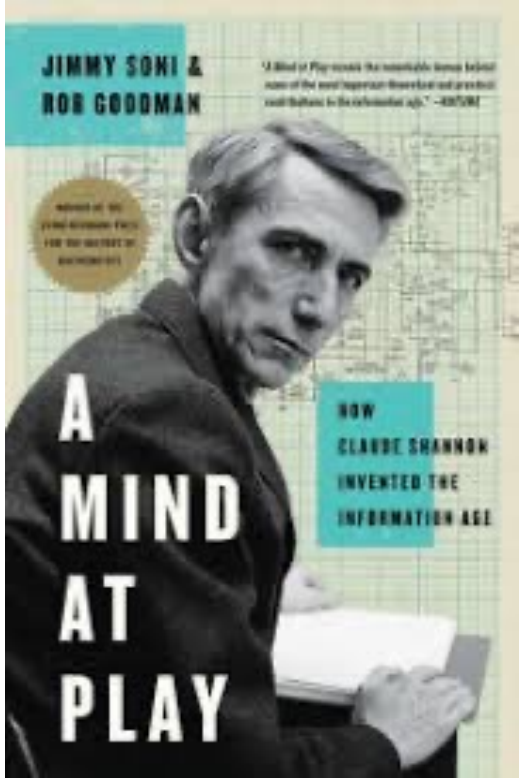
$$H = -\sum_{i}^{N} p_i \log_2 p_i$$

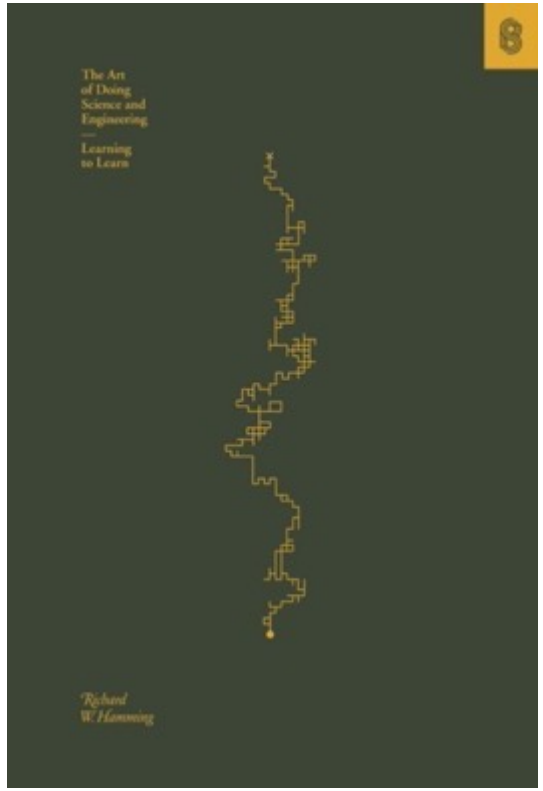


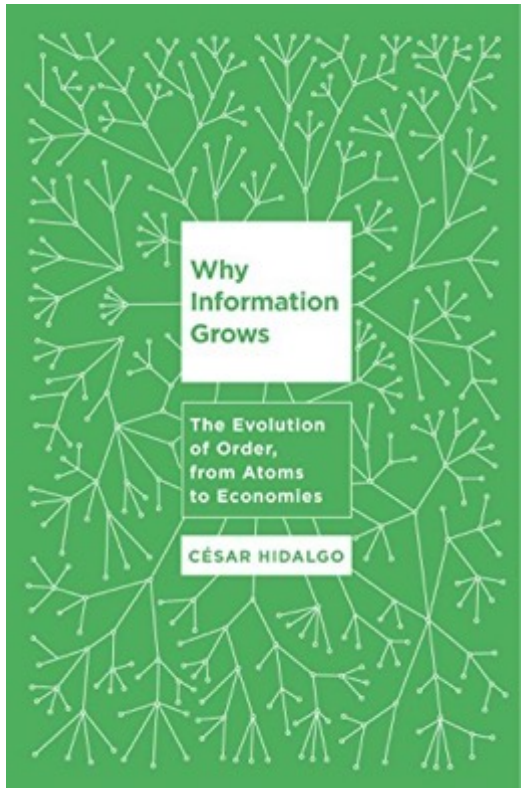
To live effectively is to live with adequate information.

Norbert Weiner, 1894. - 1964.

James Gleick
The Information
'A work of rare penetration, a true history of ideas' Daily Telegraph


JIMMY SONI &
ROB GOODMAN
A MIND AT PLAY
HOW CLAUDE SHANNON INVENTED THE INFORMATION AGE


The Art of Doing Science and Engineering
Learning to Learn
Richard W. Hamming


Why Information Grows
The Evolution of Order, from Atoms to Economies
CÉSAR HIDALGO

Koje dodatne informacije vas zanimaju?