Signali i sustavi - Zadaci za vježbu

II. tjedan

1. Koji su od sljedećih kontinuiranih signala periodički? Za one koji jesu, izračunajte temeljni period.
   a. $\cos^2(t)$,
   b. $\cos(2\pi t)\mu(t)$,
   c. $e^{j\pi t}$,
   d. $\cos(t^2)$,
   e. $e^{j\omega_0 t}$.

Rješenje:

Kontinuirani signal je periodičan ako za njega vrijedi $x(t) = x(t+T)$, gdje je T period, uz $\forall t \in \mathbb{R}, T \in \mathbb{R}_+$.

a. Za $\cos^2(t)$ vrijedi trigonometrijska relacija
$$x(t) = \cos^2(t) = \frac{1+\cos(2t)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2t}{2} = x_1(t) + x_2(t).$$
Prvi dio signala $x_1(t) = \frac{1}{2}$ je konstanta koja se kontinuirano ponavlja.
Za drugi dio signala tražimo period prema definiciji
$$x(t+T) = \cos\big(2(t+T)\big) = \cos(2t+2T) = \cos 2t \cos 2T - \sin 2t \sin 2T,$$
što mora biti jednako $x(t) = \cos 2t$. Prema tome mora biti $\cos 2T = 1, \sin 2T = 0$. Rješenja ovih jednadžbi su $2T = 2k\pi, k\epsilon\mathbb{N}$, pa je period ovog dijela zadanog signala $T = k\pi$. Osnovni period se dobije za minimalni *k*, tj. *k=1*, pa je $T = \pi$.
Ukupno period zadanog signala je $T = \pi$.

b. $x(t) = \cos(2\pi t)\,\mu(t)$. Kako je $\mu(t)$ funkcija koja je definirana kao nula za $t < 0$ i jedan za $t \geq 0$, umnožak stepa i kosinusa će biti nula prije nule i kosinus poslije nule. Da bi funkcija bila periodična mora se ponavljati u obje strane vremena. Kako to ovdje nije slučaj, zadani signal nije periodičan.

c. $x(t) = e^{j\pi t}$. Period ćemo tražiti prema definiciji.
$$x(t+T) = e^{j\pi(t+T)} = e^{j\pi t}e^{j\pi T},$$
što mora biti jednako $x(t) = e^{j\pi t}$. Iz toga izlazi da $e^{j\pi T} = 1$.
U trigonometrijskom obliku ovo je $\cos \pi T + j \sin \pi T = 1$. Rješenje ove jednadžbe daje $\pi T = 2k\pi, T = 2k$.
Osnovni period je zato *T=2*.

d. $x(t) = \cos(t^2)$. Ponovno krećemo prema definiciji:
$$x(t+T) = \cos((t+T)^2) = \cos(t^2 + 2tT + T^2) = x(t) = \cos(t^2)$$
Rješavanjem ove jednadžbe izlazi $2tT + T^2 = 2k\pi$, tj. $\frac{2tT+T^2}{2\pi} = k, k\epsilon\mathbb{N}$. Kako period mora biti konstantan realan broj, nije moguće takvoga naći da zadovoljava ovu jednadžbu. Ova funkcija nije periodična.

e. $x(t) = e^{j\omega_0 t}$. Krećemo slično kao u c. dijelu zadatka
$$x(t+T) = e^{j\omega_0(t+T)} = e^{j\omega_0 t}e^{j\omega_0 T} = e^{j\omega_0 t} = x(t),$$

odnosno $e^{j\omega_0 T} = 1$. Ovo je zadovoljeno za:

- ➔ $\omega_0 = 0$ (tada će biti $x(t) = 1$, pa je funkcija periodična za svaki $T \in \mathbb{R}_+$),
- ➔ $\omega_0 \neq 0$, kada je $\omega_0 T = 2k\pi$, pa je period $T = \frac{2k\pi}{\omega_0}$. Temeljni period je tada $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

2. Jesu li sljedeći diskretni signali periodički? Ako jesu, izračunajte temeljni period.

   a. $\cos\left(\pi n+\frac{\pi}{4}\right)$,

   b. $\cos\left(\frac{\pi n^2}{8}\right)$,

   c. $\cos\left(\frac{n}{3}+1\right)$.

Rješenje:

Diskretan signal je periodičan ako za njega vrijedi $x(n)=x(n+N)$, gdje je N period, uz $\forall n \in \mathbb{Z}, N \in \mathbb{N}$.

a. $x(n)=\cos\left(\pi n+\frac{\pi}{4}\right)$. Traženje perioda krenut ćemo prema definiciji:

$$x(n+N)=\cos\left(\pi(n+N)+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\pi n+\frac{\pi}{4}+\pi N\right)$$
$$=\cos\left(\pi n+\frac{\pi}{4}\right)\cos(\pi N)-\sin\left(\pi n+\frac{\pi}{4}\right)\sin(\pi N)$$

što mora biti jednako $x(n)=\cos\left(\pi n+\frac{\pi}{4}\right)$. Da bi to bilo jednako mora vrijediti $\cos(\pi N)=1$ i $\sin(\pi N)=0$. Rješenje ovih jednadžbi je $\pi N=2k\pi \rightarrow N=2k$.
Temeljni period je *N=2*.

b. $x(n)=\cos\left(\frac{\pi n^2}{8}\right)$. Prema definiciji umjesto *n* pišemo *n+N*:

$$x(n+N)=\cos\left(\frac{\pi(n+N)^2}{8}\right)=\cos\left(\frac{\pi n^2}{8}+\frac{2\pi nN}{8}+\frac{\pi N^2}{8}\right)$$

Kako bi ovo bilo periodično mora biti $\frac{2\pi nN+\pi N^2}{8}=2k\pi$, odnosno $\frac{N}{8}\left(n+\frac{N}{2}\right)=k$. Kako *k* mora biti prirodan broj, a isto tako i *n* i *N*, sa lijeve strane ne smije biti razlomaka. Najmanji *N* za koji ćemo pokratiti razlomke je *N=8*, te je to i osnovni period zadanog signala.

c. $x(n)=\cos\left(\frac{n}{3}+1\right)$. Traženje perioda krenut ćemo prema definiciji:

$$x(n+N)=\cos\left(\frac{1}{3}(n+N)+1\right)=\cos\left(\frac{n}{3}+1+\frac{N}{3}\right)$$
$$=\cos\left(\frac{n}{3}+1\right)\cos\left(\frac{N}{3}\right)-\sin\left(\frac{n}{3}+1\right)\sin\left(\frac{N}{3}\right)$$

što mora biti jednako $x(n)=\cos\left(\frac{n}{3}+1\right)$. Da bi to bilo jednako mora vrijediti $\cos\left(\frac{N}{3}\right)=1$ i $\sin\left(\frac{N}{3}\right)=0$. Rješenje ovih jednadžbi je $\frac{N}{3}=2k\pi \rightarrow N=6k\pi$. Kako je *k* prirodni broj, *N* će uvijek biti realan. Kod diskretnih signala period ne smije biti realan (već samo prirodan broj), ova funkcija NIJE periodička.

NAPOMENA: U zadatku naravno ne mora uvijek biti zadan kosinus, mogu biti i druge funkcije, postupak je analogan.

3. Neka je $x(t) = e^{j\omega_0 t}$ kontinuirani kompleksni eksponencijalni signal. Neka je $x(n)$ diskretni eksponencijalni signal dobiven iz kontinuiranog signala $x(t)$ uniformnim očitavanjem s periodom T_s. Je li dobiveni diskretni signal uvijek periodičan? Ako nije, pod kojim uvjetima je?

Rješenje:

Očitavanjem kontinuiranog signala dobivamo:

$$x(n) = x(nT_s) = e^{j\omega_0 n T_s}$$

Ako je *x(n)* periodičan s temeljnim periodom *N* tada vrijedi

$$x(n) = x(n+N)$$

U ovom slučaju je to:

$$x(n+N) = e^{j\omega_0 (n+N) T_s} = e^{j\omega_0 n T_s} \cdot e^{j\omega_0 N \cdot T_s} = e^{j\omega_0 n T_s} = x(n)$$

Slijedi da je $e^{j\omega_0 N T_s} = 1$.

Ovo se najlakše riješi rastavljanjem na sinuse i kosinuse

$$e^{j\omega_0 N T_s} = \cos(\omega_0 N T_s) + j \cdot \sin(\omega_0 N T_s) = 1$$

Pa mora biti $\cos(\omega_0 N T_s) = 1$ i $\sin(\omega_0 N T_s) = 0$, a to će biti za

$$\omega_0 N T_s = 2k\pi \rightarrow N = \frac{2k\pi}{\omega_0 T_s}.$$

Kako *N* mora biti prirodan broj, treba promotriti u kojim će se to uvjetima dogoditi. Temeljni period signala je $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$. Kada se to uvrsti u izraz za period:

$$N = \frac{2k\pi}{\frac{2\pi}{T_0} T_s} = \frac{kT_0}{T_s}.$$

Kako *k* može biti bilo koji cijeli broj, omjer $\frac{T_0}{T_s}$ mora biti racionalan, da bi period *N* bio cijeli broj.

x(n) je periodičan, ako je omjer $\frac{T_0}{T_s}$ (period otipkavanja i temeljnog perioda signala *x(t)*)racionalan broj.

4. Zadan je diskretan signal $x(n) = \cos(an + 1)$. Kakav mora biti a da bi signal bio periodičan?

Rješenje:

Da bi signal bio periodičan mora vrijediti:

$$\cos(an + 1) = \cos(a(n + N) + 1) = \cos(an + 1 + aN)\text{, uz } N, k, n \in \mathbb{Z}$$

Dakle mora biti $aN = 2k\pi$.

Odnosno izraz $N = \frac{2k\pi}{a}$ mora biti prirodan.

Iz gornjeg, evidentno slijedi da a mora biti racionalni višekratnik broja π, tj.

$$a = \frac{m}{l}\pi\text{, gdje su } m, l \in \mathbb{Z}$$

U tom slučaju

$$N = \frac{2k\pi}{\frac{m}{l}\pi} = \frac{2kl}{m}.$$

Očito za svaki izbor *m* i *l*, postoji takav *k* da je gornji izraz prirodan broj!

5. Zadan je diskretan signal $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$. Definiramo novi signal $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ na sljedeći način: $\forall n \in \mathbb{Z}, f(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(n - kp)$, pri čemu je $p \in \mathbb{N}$. Dokažite da je signal f periodičan za svaki diskretan signal g za koji zadana suma konvergira.

Rješenje:

Zadani signali $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ i $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ su diskretni signali. Da bi diskretan signal f bio periodičan mora vrijediti

$$f(n + N) = f(n),$$

$$f(n + N) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(n + N - kp).$$

Možemo izabrati takav $N \in \mathbb{N}$, kojeg možemo napisati kao umnožak $N = m \cdot p$, gdje su $m, p \in \mathbb{N}$. Zadani signal tada glasi:

$$f(n + N) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(n + mp - kp)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} g\big(n - p(k - m)\big)$$

$$= \begin{vmatrix} t = k - m \\ k = +\infty \to t = +\infty \\ k = -\infty \to t = -\infty \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{t=-\infty}^{\infty} g(n - pt) = f(n)$$

Pa je zadani signal *f(n)* periodičan.

6. Izračunajte sljedeće integrale

   a. $\int_0^\infty \delta(t-2)t^2 dt$
   b. $\int_{-\infty}^\infty \mu(t-1)\delta(t)\cos t \cdot dt$

Rješenje:
Diracova delta funkcija definirana je $\forall t \in \mathbb{R}$ i iznosi $\delta(t) = 0$ za $t \neq 0$. Površina ispod impulsa iznosi $\int_{-\infty}^\infty \delta(t)dt = 1$. Množenjem sa nekom funkcijom dobiva se

$$f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0).$$

Za ovu funkciju se može reći da „vadi" vrijednost podintegralne funkcije na mjestu na kojem je impuls definiran:

$$\int_{-\infty}^\infty f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)\int_{-\infty}^\infty \delta(t)dt = f(t_0).$$

a. Traži se $\int_0^\infty \delta(t-2)t^2 dt$. Usporedbom sa prethodnom formulom izlazi da je $t_0 = 2$, a $f(t) = t^2$. Zato ovaj integral iznosi
$$\int_0^\infty \delta(t-2)t^2 dt = t_0^2 = 4.$$
b. Postupak je sličan:
$$\int_{-\infty}^\infty \mu(t-1)\delta(t)\cos t \cdot dt = \mu(t_0-1)\cos t_0 \int_{-\infty}^\infty \delta(t)dt = |\text{uz } t_0 = 0|$$
$$= \mu(0-1)\cos 0 = 0.$$

7. Pronađite i skicirajte generaliziranu derivaciju signala

$$g(t) = \mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} 1, t \geq 0, \\ -1, t < 0. \end{cases}$$

Rješenje:

Zadani signal se može napisati i u obliku sa step funkcijom: $g(t) = \mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ -1, & t < 0 \end{cases} = -1 + 2\mu(t)$.

Ovako zapisani signal se jednostavno može derivirati uzme li se u obzir da je derivacija step funkcije impuls $\left(\frac{d\mu(t)}{dt} = \delta(t)\right)$:

$$g'(t) = \left(-1 + 2\mu(t)\right)' = 2\mu'(t) = 2\delta(t).$$

8. Izračunajte generaliziranu derivaciju signala:

   a. $g(t) = t\big(\mu(t) - \mu(t-1)\big) + (3-t)\big(\mu(t-2) - \mu(t-3)\big)$

   b. $g(t) = \big(3-t\big)\big(\mu(t) - \mu(t-1)\big) + (3-t)\big(\mu(t-2) - \mu(t-3)\big)$

<u>Rješenje:</u>

a. $\mu(t) - \mu(t-1) - \delta(t-1) - \big[\mu(t-2) - \mu(t-3)\big] + \delta(t-2)$

b. $-\big[\mu(t) - \mu(t-1)\big] + 3\delta(t) - 2\delta(t-1) - \big[\mu(t-2) - \mu(t-3)\big] + \delta(t-2)$

Za vježbu, zgodno je nacrtati signale i iz slike pokušati skicirati oblik derivacije signala. Nakon toga računom provjeriti dobiveni rezultat!

9. Zadan je diskretan signal $x(n)=\cos\left(\frac{n\pi}{8}\right)$. Nađite dva različita kontinuirana signala koja otipkavanjem daju ovaj diskretan signal. Frekvencija otipkavanja neka je $f_s = 10kHz$.

Rješenje:

Zadan je diskretan signal $x(n)=\cos\left(\frac{n\pi}{8}\right)$.

Njega smo mogli dobiti iz nekog kontinuiranog signala $x(t) = \cos(\omega t)$ otipkavanjem

$$x(nT_s) = \cos(\omega nT_s).$$

Period otipkavanja je $T_s = \frac{1}{f_s} = 10000^{-1}s$.

Da bi otipkani signal i zadani diskretni signal bili jednaki mora vrijediti:

$$\cos\left(\frac{n\pi}{8}\right) = \cos(\omega nT_s),$$

$$\cos\left(\frac{n\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{2\pi f}{f_s}n\right).$$

$$\frac{n\pi}{8} = 2\pi n\frac{f}{f_s}$$

$$f = \frac{f_s}{16} = \frac{10000}{16} = 625Hz.$$

Početni kontinuirani signal je prema tome bio $x(t) = \cos(2\pi \cdot 625t) = \cos(1250\pi t)$.

Primijetite da za neki cijeli broj k vrijedi i (zbog periodičnosti cos):

$$\cos\left(2\pi\frac{f}{f_s}n\right) = \cos\left(2\pi\frac{f+kf_s}{f_s}n\right).$$

Tako možemo izabrati i frekvenciju $f = 625 + 10000 = 10625Hz$ kontinuiranog signala koji će nakon otipkavanja imati jednak diskretan signal.

Drugi kontinuirani signal koji otipkavanjem daje početni diskretni je i npr.

$$x(t) = \cos(2\pi \cdot 10625t) = \cos(21250\pi t).$$

Ovo nisu jedini signali koji su rješenje zadatka. Nađite još neki.

Napomena:

Vremenski diskretan jedinični skok μ definiran je kao

$$\forall n \in Cjelobrojni, \quad \mu(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

Vremenski kontinuiran jedinični skok μ definiran je kao

$$\forall t \in Realni, \quad \mu(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Vremenski diskretan jedinični impuls δ definiran je kao

$$\forall n \in Cjelobrojni, \quad \delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

Vremenski kontinuiran jedinični impuls δ definiran je kao

$$\forall t \in Realni, \quad \begin{cases} \delta(t) = 0 \ \text{ za } \ t \neq 0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1. \end{cases}$$