Signali i sustavi

Pismeni ispit – 4. rujna 2023.

Varijanta A

1. (20 bodova) Zadana su dva vremenski diskretna svevremenska signala $f[n] = \{\dots, 0, 0, 2, \underline{0}, 2, 0, 0, \dots\}$ i $g[n] = \{\dots, 0, 0, 6, 0, \underline{0}, 0, 6, 0, 0, \dots\}$.

a) **(5 bodova)** Izračunajte kut između signala f i g.

b) **(5 bodova)** Odredite vremenski diskretnu Fourierovu transformaciju (DTFT) zadanih signala.

c) **(10 bodova)** Izračunajte kut između dobivenih spektara na intervalu $[0, 2\pi]$.

2. (20 bodova) Vremenski kontinuiran kauzalan LTI sustav zadan je diferencijalnom jednadžbom $y''(t) + y'(t) - 6y(t) = u'(t) + 3u(t)$, te polaznim vrijednostima $y(0^-) = y'(0^-) = 0$. Na ulaz sustava dovedena je kauzalna pobuda $u(t) = e^t\mu(t)$.

a) **(10 bodova)** Odredite odziv mirnog sustava u vremenskoj domeni.

b) **(6 bodova)** Odredite totalni odziv sustava u vremenskoj domeni.

c) **(4 boda)** Odredite vlastite frekvencije sustava i obrazložite stabilnost sustava.

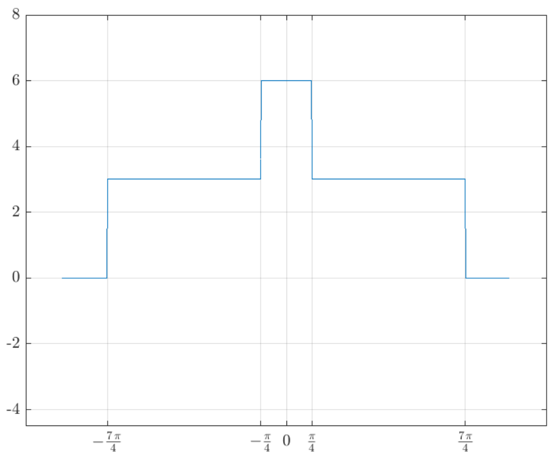
3. (20 bodova) Zadan je prijenosna funkcja vremenski diskretnog LTI sustava $H(z) = \frac{12\,z^2+24\,z}{12\,z^2+7\,z+1}$.

a) **(8 bodova)** Odredite pripadajuću jednadžbu diferencija sustava.

b) **(8 bodova)** Odredite vlastite frekvencije sustava te stabilnost sustava.

c) **(4 boda)** Odredite frekvencijsku karakteristiku sustava.

4. (20 bodova) Na slici je prikazan spektar $X(j\omega)$ nekog kontinuiranog, realnog i parnog signala $x(t)$.



a) **(5 bodova)** Napišite analitički izraz za spektar signala sa slike.

b) **(5 bodova)** Izračunajte $x(t)$.

c) **(10 bodova)** Ako je signal očitavan tri puta većom frekvencijom od najveće frekvencije sadržane u signalu, izračunajte $x[n]$ za $n = -2, -1, 0, 1$.

5. (20 bodova) Zadan je linearan vremenski stalan kontinuirani sustav svojim matricama stanja $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$. Početna stanja su $x(0^-) = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{-4}{3} \end{bmatrix}$, a pobuda je $u(t) = \begin{bmatrix} e^{-t}\mu(t) \\ \mu(t) \end{bmatrix}$.

a) **(5 bodova)** Odredite matricu karakterističnih frekvencija $\Phi(s)$.

b) **(5 bodova)** Odredite odziv nepobuđenog sustava.

c) **(8 bodova)** Odredite odziv mirnog sustava.

d) **(2 boda)** Odredite totalni odziv sustava.

Signali i sustavi

Pismeni ispit – 4. rujna 2023.

Varijanta B

1. (20 bodova) Zadana su dva vremenski diskretna svevremenska signala $f[n] = \{\ldots, 0, 0, 2, \underline{0}, 2, 0, 0, \ldots\}$ i $g[n] = \{\ldots, 0, 0, 4, 0, \underline{0}, 0, 4, 0, 0, \ldots\}$.

a) **(5 bodova)** Izračunajte kut između signala f i g.

b) **(5 bodova)** Odredite vremenski diskretnu Fourierovu transformaciju (DTFT) zadanih signala.

c) **(10 bodova)** Izračunajte kut između dobivenih spektara na intervalu $[0, 2\pi]$.

2. (20 bodova) Vremenski kontinuiran kauzalan LTI sustav zadan je diferencijalnom jednadžbom $y''(t) + 5y'(t) + 4y(t) = u'(t) + 4u(t)$, te polaznim vrijednostima $y(0^-) = y'(0^-) = 0$. Na ulaz sustava dovedena je kauzalna pobuda $u(t) = e^t \mu(t)$.

a) **(10 bodova)** Odredite odziv mirnog sustava u vremenskoj domeni.

b) **(6 bodova)** Odredite totalni odziv sustava u vremenskoj domeni.

c) **(4 boda)** Odredite vlastite frekvencije sustava i obrazložite stabilnost sustava.

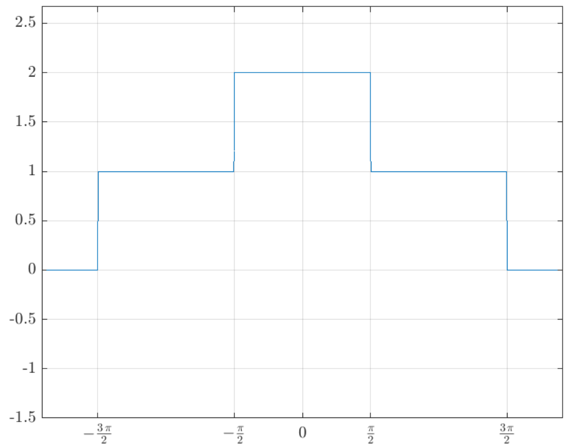
3. (20 bodova) Zadan je prijenosna funkcja vremenski diskretnog LTI sustava $H(z) = \frac{3\,z^2+6\,z}{3\,z^2-5\,z-2}$.

a) **(8 bodova)** Odredite pripadajuću jednadžbu diferencija sustava.

b) **(8 bodova)** Odredite vlastite frekvencije sustava te stabilnost sustava.

c) **(4 boda)** Odredite frekvencijsku karakteristiku sustava.

4. (20 bodova) Na slici je prikazan spektar $X(j\omega)$ nekog kontinuiranog, realnog i parnog signala $x(t)$.



a) **(5 bodova)** Napišite analitički izraz za spektar signala sa slike.

b) **(5 bodova)** Izračunajte $x(t)$.

c) **(10 bodova)** Ako je signal očitavan tri puta većom frekvencijom od najveće frekvencije sadržane u signalu, izračunajte $x[n]$ za $n = -2, -1, 0, 1$.

5. (20 bodova) Zadan je linearan vremenski stalan kontinuirani sustav svojim matricama stanja $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$. Početna stanja su $x(0^-) = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \end{bmatrix}$, a pobuda je $u(t) = \begin{bmatrix} e^{-t}\mu(t) \\ 2\mu(t) \end{bmatrix}$.

a) **(5 bodova)** Odredite matricu karakterističnih frekvencija $\Phi(s)$.

b) **(5 bodova)** Odredite odziv nepobuđenog sustava.

c) **(8 bodova)** Odredite odziv mirnog sustava.

d) **(2 boda)** Odredite totalni odziv sustava.

Signali i sustavi

Pismeni ispit – 4. rujna 2023.

Varijanta A

1. a) $\langle f, g\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]\, g[n] = 0 \quad \Rightarrow \quad \angle(f,g) = \frac{\pi}{2}$

b) $F\left(e^{j\Omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] \cdot e^{-jn\Omega} = 2e^{j\Omega} + 2e^{-j\Omega} = 4\cos(\Omega)$

$G\left(e^{j\Omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g[n] \cdot e^{-jn\Omega} = 6e^{2j\Omega} + 6e^{-2j\Omega} = 12\cos(2\Omega)$

c) $$\begin{aligned}
\langle F, G\rangle &= \int_0^{2\pi} F\left(e^{j\Omega}\right) G\left(e^{j\Omega}\right)\, d\Omega = 48 \int_0^{2\pi} \cos(\Omega)\cos(2\Omega)\, d\Omega \\
&= 48\left(\int_0^{\pi} \cos(\Omega)\cos(2\Omega)\, d\Omega + \int_{\pi}^{2\pi} \cos(\Omega)\cos(2\Omega)\, d\Omega\right) \\
&= 48\left(\int_0^{\pi} \cos(\Omega)\cos(2\Omega)\, d\Omega + \int_0^{\pi} \cos(\Omega+\pi)\cos(2\Omega+2\pi)\, d\Omega\right) \\
&= 48\left(\int_0^{\pi} \cos(\Omega)\cos(2\Omega)\, d\Omega - \int_0^{\pi} \cos(\Omega)\cos(2\Omega)\, d\Omega\right) \\
&= 48 \cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

2. a) Mirni sustav određujemo uz polazne vrijednosti jednake nuli ($y_m(0^-) = 0$ i $y'_m(0^-) = 0$) na zadanu pobudu $u(t) = e^t\mu(t)$. Prvo ćemo odrediti početne uvjete u $t = 0^+$. Korištenjem formula ili integriranjem diferencijalne jednadžbe (pogledaj 16. predavanje) dolazimo do jednadžbi

$$y_m(0^+) - y_m(0^-) = 0,$$
$$y'_m(0^+) - y'_m(0^-) + \underbrace{(y_m(0^+) - y_m(0^-))}_{=0} = \underbrace{u(0^+)}_{=1} - \underbrace{u(0^-)}_{=0}.$$

Dobivamo $y_m(0^+) = 0$ i $y'_m(0^+) = 1$. Iz karakterističnog polinoma određujemo karakteristične vrijednosti (frekvencije) sustava.

$$s^2 + s - 6 = 0,$$
$$s_1 = 2, \quad s_2 = -3$$

Homogeno rješenje je $y_h(t) = (C_1e^{2t} + C_2e^{-3t})\mu(t)$. Partikularno rješenje je oblika $y_p(t) = Ce^t\mu(t)$. Uvrštavanjem partikularnog rješenja u polaznu diferencijalnu jednadžbu određujemo nepoznatu konstantu $C \in \mathbb{R}$.

$$y''_p(t) + y'_p(t) - 6y_p(t) = u'(t) + 3u(t)$$
$$Ce^t(1 + 1 - 6) = e^t + 3e^t = 4e^t$$
$$C = -1$$

Odziv mirnog sustava glasi $y_m(t) = y_h(t) + y_p(t) = (C_1e^{2t} + C_2e^{-3t} - e^t)\mu(t)$. Konstante $C_1 \in \mathbb{R}$ i $C_2 \in \mathbb{R}$ određujemo iz početnih uvjeta u $t = 0^+$.

$$y_m(0^+) = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 - 1 = 0$$
$$y'_m(0^+) = 1 \Rightarrow 2C_1 - 3C_2 - 1 = 1$$

$$C_1 = 1, \quad C_2 = 0$$

$$y_m(t) = (e^{2t} - e^t)\mu(t)$$

b) Uočite da je zadani LTI sustav miran. Zbog toga odziv mirnog sustava odgovara totalnom odzivu sustava. U to se možemo uvjeriti tako odredimo odziv nepobuđenog sustava $y_0(t)$. Njega određujemo uz početne uvjete $y_0(0^-) = y(0^-) = 0$ i $y'_0(0^-) = y'(0^-) = 0$ bez djelovanja pobude, odnosno $u(t) = 0$. Početne uvjete u $t = 0^+$ određujemo kao i u podzadatku a).

$$y_0(0^+) - y_0(0^-) = 0$$
$$y'_0(0^+) - y'_0(0^-) + \underbrace{(y_0(0^+) - y_0(0^-))}_{=0} = \underbrace{u(0^+)}_{=0} - \underbrace{u(0^-)}_{=0}$$

Dobivamo $y_0(0^+) = 0$ i $y'_0(0^+) = 0$. Karakteristične vrijednosti ostaju iste kao i u prethodnom podzadatku. Homogeno rješenje je $y_h(t) = (C_1e^{2t} + C_2e^{-3t})\mu(t)$. Zbog izostanka pobude ($u(t) = 0$) partikularno rješenje također iščezava ($y_p(t) = 0$). Dakle, odzivu nepobuđenog sustava $y_0(t)$ pridonose samo karakteristične vrijednosti, odnosno homogeno rješenje. Konstante $C_1 \in \mathbb{R}$ i $C_2 \in \mathbb{R}$ određujemo iz početnih uvjeta u $t = 0^+$.

$$y_0(0^+) = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 = 0$$
$$y'_0(0^+) = 0 \Rightarrow 2C_1 - 3C_2 = 0$$

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0$$

$$y_0(t) = 0$$

Totalni odziv je zbroj mirnog i nepobuđenog odziva,

$$y_t(t) = y_m(t) + y_0(t) = y_m(t).$$

c) Karakteristične frekvencije sustava su $s_1 = 2$ i $s_2 = -3$. S obzirom na to da je $Re\{s_1\} > 0$, sustav nije stabilan.

3. a)

$$H(z) = \frac{12z^2 + 24z}{12z^2 + 7z + 1} = \frac{Y(z)}{U(z)} \Rightarrow Y(z)(12z^2 + 7z + 1) = U(z)(12z^2 + 24z)$$

$$12y[n+2] + 7y[n+1] + y[n] = 12u[n+2] + 24u[n+1]$$

$u[n]$ - ulaz, $U(z)$ - Z-transformacija ulaznog signala

$y[n]$ - izlaz, $Y(z)$ - Z-transformacija izlaznog signala

b)

$$12z^2 + 7z + 1 = 0$$

$$z_{p1} = -\frac{1}{4}$$

$$z_{p2} = -\frac{1}{3}$$

Sustav je stabilan jer su sve vlastite frekvencije po apsolutnoj vrijednosti manje od 1, odnosno nalaze se unutar jedinične kružnice u Z-ravnini.

$$|z_{p1}| < 1$$

$$|z_{p2}| < 1$$

c) Frekvencijsku karakteristiku određujemo iz prijenosne funkcije sustava supstitucijom $z = e^{j\Omega}$.

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{12e^{j2\Omega} + 24e^{j\Omega}}{12e^{j2\Omega} + 7e^{j\Omega} + 1}$$

4.

a) Prepoznajemo komponente u spektru:
$B_1 rect(\frac{\omega}{2\omega_1})$ i $B_2 rect(\frac{\omega}{2\omega_2})$, gdje je u konkretnom slučaju $B_1 = 3$, $\omega_1 = \frac{\pi}{4}$; $B_2 = 3$, $\omega_2 = \frac{7\pi}{4}$.

b) U vremenskoj domeni komponente signala iznose:
$\frac{B_1}{2\pi}\int_{-\omega_1}^{\omega_1} e^{j\omega t} d\omega = \frac{B_1}{2\pi}\frac{e^{j\omega_1 t} - e^{-j\omega_1 t}}{jt} = \frac{B_1\omega_1}{\pi}\frac{sin(\omega_1 t)}{\omega_1 t} = \frac{B_1\omega_1}{\pi} sinc(\frac{\omega_1 t}{\pi})$,
odnosno
$\frac{B_2\omega_2}{\pi} sinc(\frac{\omega_2 t}{\pi})$.
Stoga je signal suma dvaju komponenata:
$x(t) = \frac{B_1\omega_1}{\pi} sinc(\frac{\omega_1 t}{\pi}) + \frac{B_2\omega_2}{\pi} sinc(\frac{\omega_2 t}{\pi}) = \frac{3}{4} sinc(\frac{t}{4}) + \frac{21}{4} sinc(\frac{7t}{4})$.

c) Pronađemo $\omega_{max} = max(\omega_1, \omega_2)$ i izračunamo **triput veću** kružnu frekvenciju očitavanja $\omega_s = 3\omega_{max}$, odnosno periodu $T = \frac{2\pi}{\omega_s}$.
Očitanja za $t = nT$ su:
$x[n] \hat{=} x(nT) = \frac{B_1\omega_1}{\pi} sinc(\frac{\omega_1}{\pi} n \frac{2\pi}{\omega_s}) + \frac{B_2\omega_2}{\pi} sinc(\frac{\omega_2}{\pi} n \frac{2\pi}{\omega_s})$, i konačno:
$x[n] = \frac{B_1\omega_1}{\pi} sinc(2\frac{\omega_1}{\omega_s} n) + \frac{B_2\omega_2}{\pi} sinc(2\frac{\omega_2}{\omega_s} n)$.
Uvrštavanje $n = -2, -1, 0, 1$ daje traženi rezultat.

Na primjer, za $n = 0$ rezultat je $x[0] = \frac{B_1\omega_1}{\pi} + \frac{B_2\omega_2}{\pi}$, itd. Kako je signal paran, vrijedi $x[-1] = x[1]$.

$$x[n] = \{-0.3794, 2.9097, \underline{6.0000}, 2.9097\}$$

5. a) Matrica karakterističnih frekvencija se računa prema formuli $\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \frac{adj(sI-A)}{det(sI-A)}$ Uvrštavanjem zadanih matrica dobivamo: $\Phi(s) = \frac{1}{(s-1)(s+4)} \cdot \begin{bmatrix} s+1 & 3 \\ 2 & s+2 \end{bmatrix}$

b) Odziv nepobuđenog sustava se računa iz formule $Y_n(s) = C\Phi(s)x(0^-)$.

Uvrštavanjem zadanih matrica dobivamo: $Y_n(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{(s-1)(s+4)} \cdot \begin{bmatrix} s+1 & 3 \\ 2 & s+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{-4}{3} \end{bmatrix} = \frac{2}{s+4}$.

U vremenskoj domeni $y_n(t) = 2e^{-4t}\mu(t)$.

c) Odziv mirnog sustava se računa iz formule $Y_m(s) = (C\Phi(s)B + D)U(s)$.

Pobuda $u(t) = \begin{bmatrix} e^{-t}\mu(t) \\ \mu(t) \end{bmatrix}$ u Laplaceovoj domeni iznosi $U(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} \\ \frac{1}{s} \end{bmatrix}$.

Uvrštavanjem zadanih matrica dobivamo:

$$Y_m(s) = (\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{(s-1)(s+4)} \cdot \begin{bmatrix} s+1 & 3 \\ 2 & s+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}) \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} \\ \frac{1}{s} \end{bmatrix} = \frac{s+5}{(s-1)(s+4)}.$$

Nakon rastavljanja na parcijalne razlomke dobivamo: $Y_m(s) = \frac{-1}{5}\frac{1}{s+4} + \frac{6}{5}\frac{1}{s-1}$

U vremenskoj domeni $y_m(t) = (\frac{-1}{5}e^{-4t} + \frac{6}{5}e^{t})\mu(t)$.

d) Totalni odziv sustava je zbroj nepobuđenog i mirnog odziva: $y_m(t) = (\frac{9}{5}e^{-4t} + \frac{6}{5}e^{t})\mu(t)$.

Signali i sustavi

Pismeni ispit – 4. rujna 2023.

Varijanta B

1. a) $\langle f, g\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]\, g[n] = 0 \quad \Rightarrow \quad \angle(f,g) = \frac{\pi}{2}$

b) $F\left(e^{j\Omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] \cdot e^{-jn\Omega} = 2e^{j\Omega} + 2e^{-j\Omega} = 4\cos(\Omega)$

$G\left(e^{j\Omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g[n] \cdot e^{-jn\Omega} = 4e^{2j\Omega} + 4e^{-2j\Omega} = 8\cos(2\Omega)$

c) $$\begin{aligned}\langle F, G\rangle &= \int_0^{2\pi} F\left(e^{j\Omega}\right) G\left(e^{j\Omega}\right)\, d\Omega = 32\int_0^{2\pi} \cos(\Omega)\cos(2\Omega)\, d\Omega \\ &= 32\left(\int_0^{\pi} \cos(\Omega)\cos(2\Omega)\, d\Omega + \int_{\pi}^{2\pi} \cos(\Omega)\cos(2\Omega)\, d\Omega\right) \\ &= 32\left(\int_0^{\pi} \cos(\Omega)\cos(2\Omega)\, d\Omega + \int_0^{\pi} \cos(\Omega+\pi)\cos(2\Omega+2\pi)\, d\Omega\right) \\ &= 32\left(\int_0^{\pi} \cos(\Omega)\cos(2\Omega)\, d\Omega - \int_0^{\pi} \cos(\Omega)\cos(2\Omega)\, d\Omega\right) \\ &= 48 \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

2. a) Mirni sustav određujemo uz polazne vrijednosti jednake nuli ($y_m(0^-) = 0$ i $y'_m(0^-) = 0$) na zadanu pobudu $u(t) = e^t\mu(t)$. Prvo ćemo odrediti početne uvjete u $t = 0^+$. Korištenjem formula ili integriranjem diferencijalne jednadžbe (pogledaj 16. predavanje) dolazimo do jednadžbi

$$y_m(0^+) - y_m(0^-) = 0,$$
$$y'_m(0^+) - y'_m(0^-) + 5\underbrace{(y_m(0^+) - y_m(0^-))}_{=0} = \underbrace{u(0^+)}_{=1} - \underbrace{u(0^-)}_{=0}.$$

Dobivamo $y_m(0^+) = 0$ i $y'_m(0^+) = 1$. Iz karakterističnog polinoma određujemo karakteristične vrijednosti (frekvencije) sustava.

$$s^2 + 5s + 4 = 0,$$
$$s_1 = -1, \quad s_2 = -4$$

Homogeno rješenje je $y_h(t) = (C_1e^{-t} + C_2e^{-4t})\mu(t)$. Partikularno rješenje je oblika $y_p(t) = Ce^t\mu(t)$. Uvrštavanjem partikularnog rješenja u polaznu diferencijalnu jednadžbu određujemo nepoznatu konstantu $C \in \mathbb{R}$.

$$y''_p(t) + 5y'_p(t) + 4y_p(t) = u'(t) + 4u(t)$$
$$Ce^t(1 + 5 + 4) = e^t + 4e^t = 5e^t$$
$$C = \frac{1}{2}$$

Odziv mirnog sustava glasi $y_m(t) = y_h(t) + y_p(t) = (C_1e^{-t} + C_2e^{-4t} + \frac{1}{2}e^t)\mu(t)$. Konstante $C_1 \in \mathbb{R}$ i $C_2 \in \mathbb{R}$ određujemo iz početnih uvjeta u $t = 0^+$.

$$y_m(0^+) = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 + \frac{1}{2} = 0$$
$$y'_m(0^+) = 1 \Rightarrow -C_1 - 4C_2 + \frac{1}{2} = 1$$

$$C_1 = -\frac{1}{2}, \quad C_2 = 0$$

$$y_m(t) = (-\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^t)\mu(t)$$

b) Uočite da je zadani LTI sustav miran. Zbog toga odziv mirnog sustava odgovara totalnom odzivu sustava.
U to se možemo uvjeriti tako odredimo odziv nepobuđenog sustava $y_0(t)$. Njega određujemo uz početne uvjete $y_0(0^-) = y(0^-) = 0$ i $y'_0(0^-) = y'(0^-) = 0$ bez djelovanja pobude, odnosno $u(t) = 0$. Početne uvjete u $t = 0^+$ određujemo kao i u podzadatku a).

$$y_0(0^+) - y_0(0^-) = 0$$
$$y'_0(0^+) - y'_0(0^-) + 5\underbrace{(y_0(0^+) - y_0(0^-))}_{=0} = \underbrace{u(0^+)}_{=0} - \underbrace{u(0^-)}_{=0}$$

Dobivamo $y_0(0^+) = 0$ i $y'_0(0^+) = 0$. Karakteristične vrijednosti ostaju iste kao i u prethodnom podzadatku. Homogeno rješenje je $y_h(t) = (C_1e^{-t} + C_2e^{-4t})\mu(t)$. Zbog izostanka pobude ($u(t) = 0$) partikularno rješenje također iščezava ($y_p(t) = 0$). Dakle, odzivu nepobuđenog sustava $y_0(t)$ pridonose samo karakteristične vrijednosti, odnosno homogeno rješenje. Konstante $C_1 \in \mathbb{R}$ i $C_2 \in \mathbb{R}$ određujemo iz početnih uvjeta u $t = 0^+$.

$$y_0(0^+) = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 = 0$$
$$y_0'(0^+) = 0 \Rightarrow -C_1 - 4C_2 = 0$$

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0$$

$$y_0(t) = 0$$

Totalni odziv je zbroj mirnog i nepobuđenog odziva,

$$y_t(t) = y_m(t) + y_0(t) = y_m(t).$$

c) Karakteristične frekvencije sustava su $s_1 = -1$ i $s_2 = -4$. S obzirom na to da je $Re\{s_1\} < 0$ i $Re\{s_2\} < 0$, sustav je stabilan.

3. a)

$$H(z) = \frac{3z^2 + 6z}{3z^2 - 5z - 2} = \frac{Y(z)}{U(z)} \Rightarrow Y(z)(3z^2 - 5z - 2) = U(z)(3z^2 + 6z)$$

$$3y[n+2] - 5y[n+1] - 2y[n] = 3u[n+2] + 6u[n+1]$$

$u[n]$ - ulaz, $U(z)$ - Z-transformacija ulaznog signala

$y[n]$ - izlaz, $Y(z)$ - Z-transformacija izlaznog signala

b)

$$3z^2 - 5z - 2 = 0$$

$$z_{p1} = 2$$

$$z_{p2} = -\frac{1}{3}$$

Sustav nije stabilan jer je pol z_{p1} po apsolutnoj vrijednosti veći ili jednak od 1, odnosno ne nalazi se unutar jedinične kružnice u Z-ravnini.

$$|z_{p1}| \geq 1$$

$$|z_{p2}| < 1$$

c) Frekvencijsku karakteristiku određujemo iz prijenosne funkcije sustava supstitucijom $z = e^{j\Omega}$.

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{3e^{j2\Omega} + 6e^{j\Omega}}{3e^{j2\Omega} - 5e^{j\Omega} - 2}$$

4.

a) Prepoznajemo komponente u spektru:
$B_1 rect(\frac{\omega}{2\omega_1})$ i $B_2 rect(\frac{\omega}{2\omega_2})$, gdje je u konkretnom slučaju $B_1 = 1$, $\omega_1 = \frac{\pi}{2}$; $B_2 = 1$, $\omega_2 = \frac{3\pi}{2}$.

b) U vremenskoj domeni komponente signala iznose:
$\frac{B_1}{2\pi}\int_{-\omega_1}^{\omega_1} e^{j\omega t} d\omega = \frac{B_1}{2\pi}\frac{e^{j\omega_1 t} - e^{-j\omega_1 t}}{jt} = \frac{B_1\omega_1}{\pi}\frac{sin(\omega_1 t)}{\omega_1 t} = \frac{B_1\omega_1}{\pi} sinc(\frac{\omega_1 t}{\pi})$,
odnosno
$\frac{B_2\omega_2}{\pi} sinc(\frac{\omega_2 t}{\pi})$.
Stoga je signal suma dvaju komponenata:
$x(t) = \frac{B_1\omega_1}{\pi} sinc(\frac{\omega_1 t}{\pi}) + \frac{B_2\omega_2}{\pi} sinc(\frac{\omega_2 t}{\pi}) = \frac{1}{2} sinc(\frac{t}{2}) + \frac{3}{2} sinc(\frac{3t}{2})$.

c) Pronađemo $\omega_{max} = max(\omega_1, \omega_2)$ i izračunamo **triput veću** kružnu frekvenciju očitavanja $\omega_s = 3\omega_{max}$, odnosno periodu $T = \frac{2\pi}{\omega_s}$.
Očitanja za $t = nT$ su:
$x[n] \hat{=} x(nT) = \frac{B_1\omega_1}{\pi} sinc(\frac{\omega_1}{\pi} n \frac{2\pi}{\omega_s}) + \frac{B_2\omega_2}{\pi} sinc(\frac{\omega_2}{\pi} n \frac{2\pi}{\omega_s})$, i konačno:
$x[n] = \frac{B_1\omega_1}{\pi} sinc(2\frac{\omega_1}{\omega_s} n) + \frac{B_2\omega_2}{\pi} sinc(2\frac{\omega_2}{\omega_s} n)$.
Uvrštavanje $n = -2, -1, 0, 1$ daje traženi rezultat.

Na primjer, za $n = 0$ rezultat je $x[0] = \frac{B_1\omega_1}{\pi} + \frac{B_2\omega_2}{\pi}$, itd. Kako je signal paran, vrijedi $x[-1] = x[1]$.

$$x[n] = \{0.0425, 1.0806, \underline{2.0000}, 1.0806\}$$

5. a) Matrica karakterističnih frekvencija se računa prema formuli $\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \frac{adj(sI-A)}{det(sI-A)}$ Uvrštavanjem zadanih matrica dobivamo: $\Phi(s) = \frac{1}{(s-1)(s+4)} \cdot \begin{bmatrix} s+1 & 3 \\ 2 & s+2 \end{bmatrix}$

b) Odziv nepobuđenog sustava se računa iz formule $Y_n(s) = C\Phi(s)x(0^-)$.

Uvrštavanjem zadanih matrica dobivamo: $Y_n(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{(s-1)(s+4)} \cdot \begin{bmatrix} s+1 & 3 \\ 2 & s+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \end{bmatrix} = \frac{6}{s+4}$.

U vremenskoj domeni $y_n(t) = 6e^{-4t}\mu(t)$.

c) Odziv mirnog sustava se računa iz formule $Y_m(s) = (C\Phi(s)B + D)U(s)$.

Pobuda $u(t) = \begin{bmatrix} e^{-t}\mu(t) \\ 2\mu(t) \end{bmatrix}$ u Laplaceovoj domeni iznosi $U(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} \\ \frac{2}{s} \end{bmatrix}$.

Uvrštavanjem zadanih matrica dobivamo:

$Y_m(s) = (\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{(s-1)(s+4)} \cdot \begin{bmatrix} s+1 & 3 \\ 2 & s+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}) \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} \\ \frac{2}{s} \end{bmatrix} = \frac{2s+9}{(s-1)(s+4)}$.

Nakon rastavljanja na parcijalne razlomke dobivamo: $Y_m(s) = \frac{-1}{5}\frac{1}{s+4} + \frac{11}{5}\frac{1}{s-1}$

U vremenskoj domeni $y_m(t) = (\frac{-1}{5}e^{-4t} + \frac{11}{5}e^{t})\mu(t)$.

d) Totalni odziv sustava je zbroj nepobuđenog i mirnog odziva: $y_m(t) = (\frac{29}{5}e^{-4t} + \frac{11}{5}e^{t})\mu(t)$.