SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

Očitavanje i rekonstrukcija signala zadanog spektrom

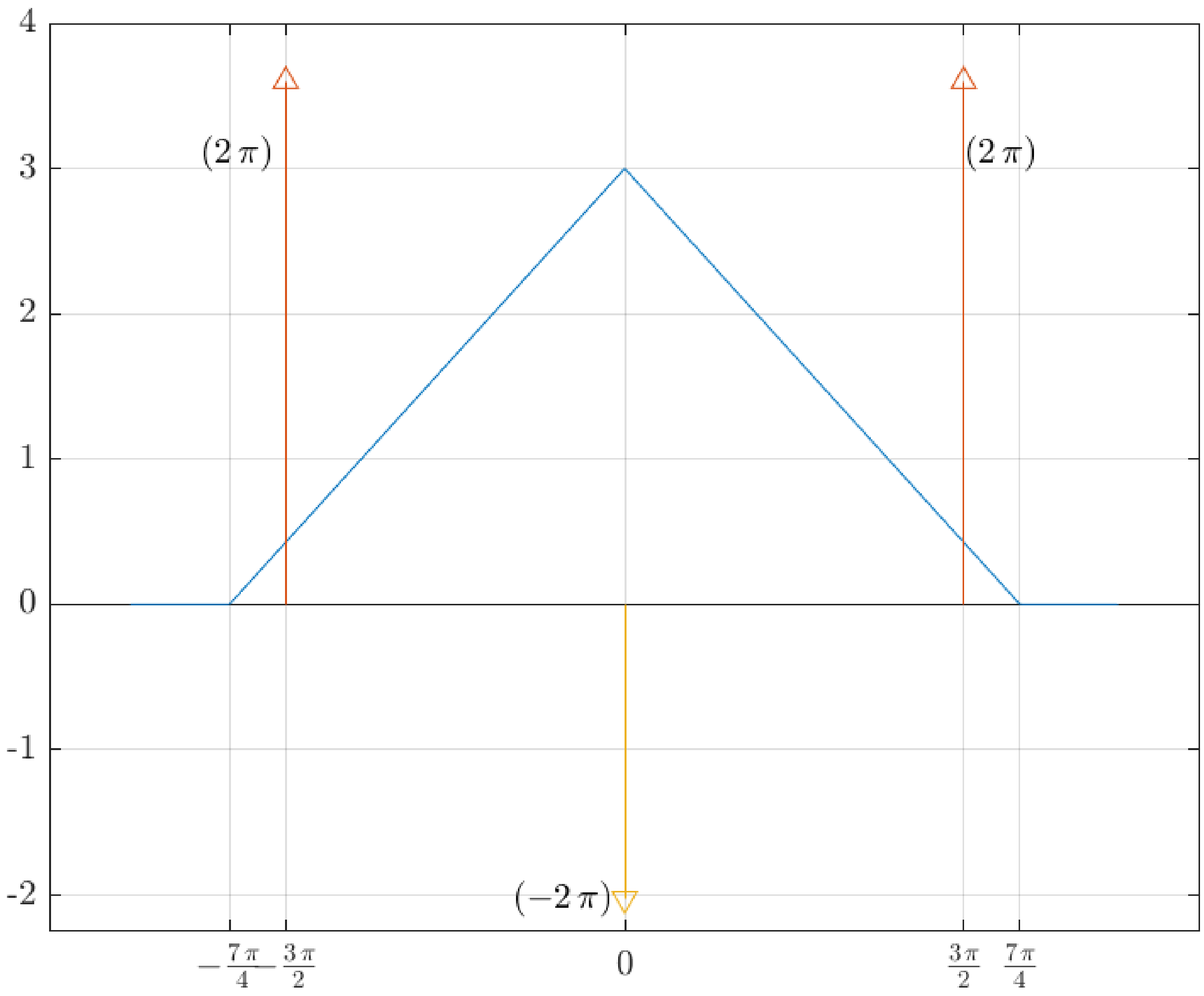
Author: *Damir Seršić*

Course: *Signali i sustavi*
Date: *24.04.2020*

Zadatak SAMO za vježbu

Na slici je prikazan spektar $X(j\omega)$ nekog kontinuiranog, realnog i parnog signala $x(t)$. Ako je signal očitavan tri puta većom frekvencijom od najveće frekvencije sadržane u signalu, izračunajte $x[n]$ za $n = -1, 0, 1, 2$.

Označimo period očitavanja sa T. Ako koristimo samo 4 člana idealne interpolacijske formule, za indekse $n = -1, 0, 1, 2$, kolika je vrijednost signala na mjestu $t = \frac{T}{2}$?



Rješenje. Prepoznajemo komponente u spektru:

$B_1 tri(\frac{\omega}{\omega_1})$, $\quad B_2\delta(\omega+\omega_2)+B_2\delta(\omega-\omega_2)$ $\quad$ i $\quad B_3\delta(\omega)$,
gdje je u konkretnom slučaju $B_1 = 3$, $\omega_1 = \frac{7\pi}{4}$; $B_2 = 2\pi$, $\omega_2 = \frac{3\pi}{2}$ i $B_3 = -2\pi$.

Iz pregleda formula znamo:

$sinc^2(\alpha t) \longrightarrow \frac{1}{\alpha} tri(\frac{\omega}{2\pi\alpha})$, a u našem slučaju $2\pi\alpha = \omega_1$, što daje $\alpha = \frac{\omega_1}{2\pi}$.

U vremenskoj domeni komponente spektra iznose:

$F^{-1}[B_1 tri(\frac{\omega}{\omega_1})] = B_1 \frac{\omega_1}{2\pi} sinc^2(\frac{\omega_1}{2\pi}t)$

odnosno:

$\frac{B_2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[\delta(\omega+\omega_2)+\delta(\omega-\omega_2)]e^{j\omega t}d\omega = \frac{B_2}{2\pi}[e^{-j\omega_2 t}+e^{j\omega_2 t}] = \frac{B_2}{\pi}cos(\omega_2 t)$,

i

$\frac{B_3}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{B_3}{2\pi}$.

Stoga je signal suma komponenata:

$x(t) = \frac{B_1\omega_1}{2\pi} sinc^2(\frac{\omega_1 t}{2\pi}) + \frac{B_2}{\pi}cos(\omega_2 t) + \frac{B_3}{2\pi}$.

Pronađemo $\omega_{max} = max(\omega_1, \omega_2)$, a to je u našem slučaju $\frac{7\pi}{4}$ i izračunamo **triput veću** kružnu frekvenciju očitavanja $\omega_s = 3\omega_{max}$, odnosno period $T = \frac{2\pi}{\omega_s}$.

Očitanja za $t = nT$ su:

$x[n] \hat{=} x(nT) = \frac{B_1\omega_1}{2\pi} sinc^2(\frac{\omega_1}{2\pi} n \frac{2\pi}{\omega_s}) + \frac{B_2}{\pi}cos(\omega_2 n \frac{2\pi}{\omega_s}) + \frac{B_3}{2\pi}$, i konačno:

$x[n] = \frac{B_1\omega_1}{2\pi} sinc^2(\frac{\omega_1}{\omega_s} n) + \frac{B_2}{\pi}cos(2\pi\frac{\omega_2}{\omega_s} n) + \frac{B_3}{2\pi}$.

Uvrštavanje $n = -1, 0, 1, 2$ daje traženi rezultat. Koristiti MATLAB.

Na primjer, za $n = 0$ rezultat je $x[0] = \frac{B_1\omega_1}{2\pi} + \frac{B_2}{\pi} + \frac{B_3}{2\pi}$, itd. Kako je signal paran, vrijedi $x[-1] = x[1]$.

Rekonstrukcija:

$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] sinc\frac{1}{T}(t - nT)$, a u našem slučaju to iznosi:

$x(\frac{1}{2}T) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] sinc\frac{1}{T}(\frac{1}{2}T - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] sinc(\frac{1}{2} - n)$.

Ako uzmemo samo četiri člana sume, za $n = -1, 0, 1, 2$ imamo:

$x(\frac{T}{2}) \approx x[-1]sinc(\frac{1}{2}+1) + x[0]sinc(\frac{1}{2}) + x[1]sinc(\frac{1}{2}-1) + x[2]sinc(\frac{1}{2}-2)$.