4. Teorija igara

(Vlassis, ch. 3; Vidal, ch. 3)

VIŠEAGENTSKO ODLUČIVANJE

- skupina agenata istovremeno postoji u okolini i simultano (istovremeno) donosi odluke

Analiza problema simultanog višeagentskog odlučivanja – **teorija igara** (Von Neumann, 1944)

- matematička teorija, izvorno razvijena u svrhu modeliranja ekonomskih interakcija, no s vremenom se razvila u zasebnu disciplinu s čvrstim matematičkim temeljima i s primjenama u ekonomiji, biologiji, inženjerstvu, politici, društvenim znanostima, i dr...

John Von Neumann
1903–1957.

TEORIJA IGARA

Temeljni problem teorije igara:

- kako odabrati optimalnu akciju (akciju koja maksimizira korist za određenog agenta), ali uz znanje da u okolini postoje i drugi agenti, i da na konačnu korisnost neke akcije ne utječe samo odabir agenta, nego i odluke ostalih agenata

Pretpostavke teorije igara:

1. agenti koji sudjeluju u odlučivanju su **racionalni** (tj. nastoje ostvariti maksimalnu korist - “sebični” agenti)

2. agenti odlučuju **strateški**, tj. pri odlučivanju uzimaju u obzir i odluke ostalih agenata

TEORIJA IGARA

Podjela igara:

(A) Po načinu kako agenti odabiru akcije

1. **Strateške igre** ili **igre u normalnom obliku** (engl. strategic games; games in normal form)

   - svi agenti donose odluku na početku, a zatim svi simultano izvode svoje akcije

2. **Igre u proširenom obliku** (engl. extended form games)

   - akcije sudionika su sekvencijalne

(B) Po dostupnosti znanja o drugim agentima

1. **Igre sa savršenom informacijom**

2. **Igre s nesavršenom informacijom**

TEORIJA IGARA

Podjela igara:

(A) Po načinu kako agenti odabiru akcije

1. **Strateške igre** ili **igre u normalnom obliku**
   (engl. strategic games; games in normal form)

   - svi agenti donose odluku na početku, a zatim svi simultano izvode svoje akcije

2. **Igre u proširenom obliku** (engl. extended form games)

   - akcije sudionika su sekvencijalne

(B) Po dostupnosti znanja o drugim agentima

1. **Igre sa savršenom informacijom**
2. **Igre s nesavršenom informacijom**

Sada razmatramo ovo

TEORIJA IGARA

Strateške igre (igre u normalnom obliku):

1. U svijetu je prisutno n>1 agenata.

2. Svaki agent *i* odabire akciju a_i.

   Vektor akcija svih agenata $a = (a_1, ..., a_n)$ naziva se **strategija** ili **zajednička akcija** engl. joint action) ili **akcijski profil** (engl. action profile).

   (a) **čista** (engl. pure) strategija – svaki agent odabire jedinstvenu akciju
   (b) **mješovita** (engl. mixed) strategija – agent odabire više akcija, svaku s nekom vjerojatnošću

   Oznaka a_{-i} označava akcije svih ostalih agenata osim i-tog.

3. Igra se odigrava nad fiksnim stanjem svijeta *s*.

   Stanje svijeta određeno: skupom agenata, skupovima njihovih akcija, isplativostima akcija

TEORIJA IGARA

Strateške igre (igre u normalnom obliku):

4. Svaki agent raspolaže vlastitom funkcijom vrijednosti akcije Q_i*(s,a), kojom vrednuje *zajedničku akciju (strategiju) a* za agenta i u stanju s. Pošto je stanje *s* fiksno, ono se ne mora navoditi:

   => predefinirana **funkcija isplativosti** (engl. payoff function) $\mathbf{u_i(a)=Q_i^*(s,a)}$.

5. Stanje je potpuno vidljivo svim agentima. Pretpostavlja se *zajedničko znanje* među agentima (svaki agent zna što znaju drugi).

6. Svaki agent odabire samo **jednu akciju** (*jednopotezna* igra). Agenti odabiru svoje akcije *simultano* (istovremeno) i nezavisno.

   => nijedan agent ne zna konačnu odluku drugih agenata prije nego što sam donese odluku

TEORIJA IGARA

Strateške igre (igre u normalnom obliku):

Ukratko: U strateškoj igri,

- svaki agent odabire jedinstvenu akciju
- i zatim dobiva "isplatu" ovisno o odabranoj **zajedničkoj akciji**

Odabrana **zajednička akcija** naziva se **ishod** igre.

Iako funkcije isplate jesu predmet zajedničkog znanja svih agenata, agent ne zna unaprijed koju će akciju drugi agenti odabrati.

Agent jedino može pokušati **predvidjeti** odabir drugih agenata, na temelju pretpostavke o njihovoj racionalnosti.

Rješenje (eng. solution) igre = predviđanje ishoda igre korištenjem pretpostavke da su agenti racionalni i da djeluju strateški

TEORIJA IGARA

Prikaz strateške igre – **matrica isplate** (engl. payoff matrix)

		Alice	
		c	d
Bob	a	1,2	2,3
	b	4,5	6,7

- za 2 agenta: retci predstavljaju akcije prvog agenta,
  stupci akcije drugoga

  zajednička akcija određena retkom i stupcem

  elementi tablice su uređeni parovi, gdje prvi element predstavlja isplatu (korisnost) zajedničke akcije za prvoga agenta, a drugi za drugoga

- poopćivo na veći broj akcija i veći broj agenata

TEORIJA IGARA

Primjer: **Zatvorenikova dilema**

Classic Prisoner's Dilemma

Two suspects A, B are arrested by the police. The police have insufficient evidence for a conviction, and having separated both prisoners, visit each of them and offer the same deal: if one testifies for the prosecution against the other and the other remains silent, the silent accomplice receives the full 10-year sentence and the betrayer goes free. If both stay silent, the police can only give both prisoners 6 months for a minor charge. If both betray each other, they receive a 2-year sentence each.

		A	
		Cooperate	*Defect*
B	*Cooperate*	3,3	0,5
	Defect	5,0	1,1

TEORIJA IGARA

Iznalaženje rješenja strateških igara:

- Kako donijeti optimalnu odluku, uzimajući u obzir da će i svi drugi agenti htjeti donositi odluke koje su za njih optimalne?

(a) maxmin strategija (engl. maxmin strategy)

(b) strategija društvene dobrobiti (engl. social wellfare strategy)

(c) Pareto optimalna strategija (engl. Pareto optimal strategy)

(d) strategija iterativne dominacije (engl. iterated dominance strategy)

(e) Nashova ravnoteža (engl. Nash equilibrium)

TEORIJA IGARA

(a) **maxmin strategija** (engl. maxmin strategy)

- najranija strategija (Von Neumann)

- agent odabire akciju koja maksimizira najgoru moguću dobit koju agent može ostvariti

$$s_i^* = \max_{s_i} \min_{s_j} u_i(s_i, s_j).$$

- problem: rješenje u općem slučaju nije stabilno: ako jedan agent *zna* da će drugi slijediti maxmin strategiju, može zaključiti da je za njega bolje *ne slijediti* tu istu maxmin strategiju

  (npr. u tablici desno maxmin strategija daje rješenje (b,d), no ako Alice odigra d, Bobu je bolje odigrati a!)

		Alice	
		c	d
Bob	a	1,2	4,3
	b	3,2	2,4

TEORIJA IGARA

(b) **strategija društvene dobrobiti** (engl. social wellfare strategy)

- nastoji maksimizirati ukupnu dobrobit za sve igrače
  (tj. maksimizira sumu isplata svih igrača)

$$s^* = \arg\max_s \sum_i u_i(s)$$

- problem 1: rješenje također može biti nestabilno. Agenti su autonomi
  i svaki gleda svoju korist, što znači da će se odlučiti za drukčiju
  strategiju ako to *njima* donosi veću korist, bez obzira što će ukupna
  korist za sve time možda biti bitno manja

- problem 2: može biti nepravedna, jer suma će možda biti najveća
  ako jedan agent ostvari ekstremno visoku korist, a svi ostali gotovo
  ništa

TEORIJA IGARA

(c) **Pareto optimalna strategija** (engl. Pareto optimal strategy)

- strategija *s* je Pareto optimalna ako ne postoji ni jedna druga strategija *s'* koja je barem jednom agentu bolja od *s*, a istovremeno nijednom nije gora od *s*

- može postojati više od jedne Pareto optimalne strategije

- skup svih Pareto optimalnih strategija:
  (oznaka *-i* označava skup svih agenata osim *i*-toga)

$$\{s \mid \neg\exists_{s' \neq s}(\exists_i u_i(s') > u_i(s) \wedge \neg\exists_{j \in -i} u_j(s) > u_j(s'))\}$$

- Pareto strategije su visoko poželjne sa stajališta društvene dobrobiti (uklanjaju "nepravednost" čiste društvene dobrobiti)

- problem: rješenje opet može biti nestabilno – agenti gledaju samo svoju korist i možda će preferirati neke druge strategije, zbog čega će drugi lošije proći

TEORIJA IGARA

(d) **strategija iterativne dominacije** (engl. iterated dominance strategy)

- pojam **dominantne** strategije:

Strategija *a* je dominantna strategija agenta *i* ako ona rezultira većom korišću za agenta, koju god strategiju odabrali drugi agenti:

$$\forall_{a_{-i}} \forall_{b_i \neq a_i} u_i(a_{-i}, a_i) \geq u_i(a_{-i}, b_i)$$

		A: *Cooperate*	A: *Defect*
B	*Cooperate*	3,3	0,5
	Defect	5,0	1,1

TEORIJA IGARA

(d) **strategija iterativne dominacije** (engl. iterated dominance strategy)

- Algoritam **iterativne dominacije**:

  - izbacuje se “nadvladana strategija” jednog agenta (= strategija nad kojom sve ostale dominiraju)

  - postupak se ponavlja iterativno i ciklički za sve agente

  - problem: algoritam rijetko dovodi do konačnog rješenja; često puta brzo dođe do situacije da agentu preostaje mnoštvo akcija od kojih nijednu nije moguće izbaciti jer nije *uvijek* (tj. neovisno o odluci drugog agenta) lošija od ostalih

TEORIJA IGARA

(d) **strategija iterativne dominacije** (engl. iterated dominance strategy)

- Algoritam **iterativne dominacije**:

Primjer: zatvorenikova dilema

Najprije, agent A vrednuje svoje strategije
i pokušava odrediti dominantnu

		A	
		Cooperate	*Defect*
B	*Cooperate*	3,3	0,5
	Defect	5,0	1,1

TEORIJA IGARA

(d) **strategija iterativne dominacije** (engl. iterated dominance strategy)

- Algoritam **iterativne dominacije**:

Primjer: zatvorenikova dilema

Agent A vrednuje strategije:
(1) uz pretpostavku da će B odabrati “Cooperate”

		A	
		Cooperate	*Defect*
B	*Cooperate*	3,3	0,5
	Defect	5,0	1,1

=> više se isplati **Defect**

TEORIJA IGARA

(d) **strategija iterativne dominacije** (engl. iterated dominance strategy)

- Algoritam **iterativne dominacije**:

Primjer: zatvorenikova dilema

Agent A vrednuje strategije:
(2) uz pretpostavku da će B odabrati “Defect”

		A	
		Cooperate	*Defect*
B	*Cooperate*	3,3	0,5
	Defect	5,0	1,1

=> opet, više se isplati **Defect**
=> Defect je dominantna strategija => eliminiramo “Cooperate”

TEORIJA IGARA

(d) **strategija iterativne dominacije** (engl. iterated dominance strategy)

- Algoritam **iterativne dominacije**:

Primjer: zatvorenikova dilema

Agent B vrednuje strategije:
sada se zna da agent A sigurno odlučuje “Defect”:

		A	
		Cooperate	*Defect*
B	*Cooperate*	3,3	0,5
	Defect	5,0	1,1

=> B-u se isto više isplati **Defect**
=> Konačno rješenje: **(Defect, Defect)**

TEORIJA IGARA

(e) **Nashova ravnoteža** (engl. Nash equilibrium)

$s = (a_1,...,a_n)$ je Nashova ravnoteža ako je, za svakog agenta *i*, a_i najbolja akcija uz pretpostavku da će svi drugi agenti odabrati akcije iz *s*.

$$\{s \mid \forall_i \forall_{a_i \neq s_i} u_i(s_{-i}, s_i) \geq u_i(s_{-i}, a_i)\}$$

- rješava problem stabilnosti rješenja

- za dani problem može postojati više od jedne Nashove ravnoteže

- dokazano, za svaku matricu isplate postoji barem jedna Nashova ravnoteža (ali ona može biti *mješovita strategija*)

John F Nash, 1928

TEORIJA IGARA

(e) **Nashova ravnoteža** (engl. Nash equilibrium)

Određivanje Nashove ravnoteže:

Funkcija najboljeg odziva (engl. best response function)

$$B_i(a_{-i}) = \{a_i \in A_i : u_i(a_{-i},a_i) \geq u_i(a_{-i},a_i') \text{ za sve } a_i' \in A_i\}$$

- ona kaže: ako pretpostavimo da će svi ostali agenti odabrati određene akcije, što je u tom konkretnom slučaju najbolje za agenta *i*

- $B_i(a_{-i})$ je skup koji može sadržavati veći broj vrijednosti

- Nashova ravnoteže je definirana kao zajednička akcija (strategija) $s^* = (a_1^*,...,a_n^*)$ sa svojstvom da se svi njeni elementi nalaze u odgovarajućem skupu definiranom funkcijom najboljeg odziva:

$$\mathbf{a_i^* \in B_i(a_{-i}^*)}$$

TEORIJA IGARA

(e) **Nashova ravnoteža** (engl. Nash equilibrium)

Primjer: zatvorenikova dilema

		A	
		Cooperate	*Defect*
B	*Cooperate*	3,3	0,5
	Defect	5,0	1,1

Funkcija najboljeg odziva:

B_A(Cooperate) = Defect
B_A(Defect) = Defect
B_B(Cooperate) = Defect
B_B(Defect) = Defect

Sve moguće strategije su:

(a_1=Cooperate, a_2=Cooperate) -> nije $\forall_i\ a_i \in B_i(a_{-i})$
(a_1=Cooperate, a_2=Defect) -> nije $\forall_i\ a_i \in B_i(a_{-i})$
(a_1=Defect, a_2=Cooperate) -> nije $\forall_i\ a_i \in B_i(a_{-i})$
(a_1=Defect, a_2=Defect) -> **jest $\forall_i\ a_i^* \in B_i(a_{-i}^*)$** -> **Nashova ravnoteža**

TEORIJA IGARA

(e) **Nashova ravnoteža** (engl. Nash equilibrium)

Vježba: naći Nashovu ravnotežu za sljedeća dva slučaja:

	L	M	R
U	$1,0$	$1,2$	$0,1$
D	$0,3$	$0,1$	$2,0$

(a)

	L	M	R
U	$1,0$	$1,2$	$0,1$
D	$0,3$	$0,1$	$2,2$

(b)

Rješenje: **(U,M)** u oba slučaja

(e) **Nashova ravnoteža** (engl. Nash equilibrium)

Mješovita Nashova ravnoteža

– **Primjer:**

Agenti Student i Nastavnik u situaciji ispita. Cilj studenta je što lakše položiti; cilj nastavnika što lakše provjeriti studentovo znanje.

– Skup akcija: Student → Cheat (prepisivati); Honest (naučiti i pošteno položiti)
Nastavnik → Monitor (paziti na prepisivanje); Relax (opustiti se)

– Matrica isplate:

	Monitor	**Relax**
Cheat	-5,10	5,-5
Honest	2,-1	2,0

– Čiste Nashove ravnoteže: **nema** (provjeriti na ploči)

(e) **Nashova ravnoteža** (engl. Nash equilibrium)

Mješovita Nashova ravnoteža

	Monitor	Relax
Cheat	-5,10	5,-5
Honest	2,-1	2,0

– Za slučaj 2 agenta i 2 akcije
→ računanje mješovite Nashove ravnoteže jednostavno

– Svaki agent odabire svaku akciju s nekom vjerojatnošću
student: $\mathbf{p_{cheat}; p_{honest} = 1 - p_{cheat}}$
nastavnik: $\mathbf{p_{monitor}; p_{relax} = 1 - p_{monitor}}$

– **Očekivane isplate** obaju akcija, uvažavajući vjerojatnosti odabira drugog agenta, moraju biti **jednake**.

– Označimo $p_{monitor}$ s p; p_{cheat} s q:

$-5p + 5(1-p) = 2p + 2(1-p) \rightarrow \mathbf{p=3/10}$
$10q - 1(1-q) = -5q + 0(1-q) \rightarrow \mathbf{q=1/16}$

– U općem slučaju (>2 akcije ili >2 agenta) računanje teže

TEORIJA IGARA

Rezime:

- razni pristupi daju potencijalno različita rješenja;
  nije jednostavno odrediti koje je najbolje

- uobičajen problem: postojanje većeg broja ravnoteža – koje odabrati?

  - poterba za dodatnim koordinacijskim mehanizmima

TEORIJA IGARA

Ponovljene igre

- dva igrača ponavljaju istu igru veći broj puta

- “iterirana zatvorenikova dilema”
  (engl. iterated prisoner's dilemma)

(a) broj iteracija unaprijed poznat

- **indukcija unazad** (engl. backward induction)

  - za bilo koji konačan broj ponavljanja, strategija ostaje ista

- no u praksi se ljudi ne ponašaju tako (spremniji su surađivati)

(b) broj iteracija nije unaprijed poznat

- svaka iteracija je s nekom (malom) vjerojatnošću posljednja

- dokaziva kooperativna ravnoteža (“folk teorem”)

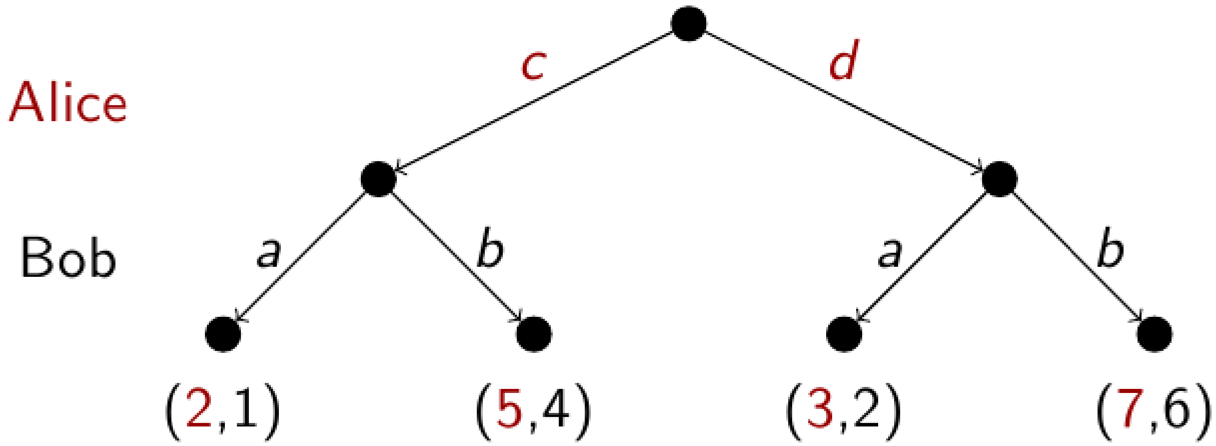
- Axelrodov eksperiment

TEORIJA IGARA

Igre u proširenom obliku (engl. games in extended form)

- igrači ne odabiru akcije odjednom, nego sekvencijalno

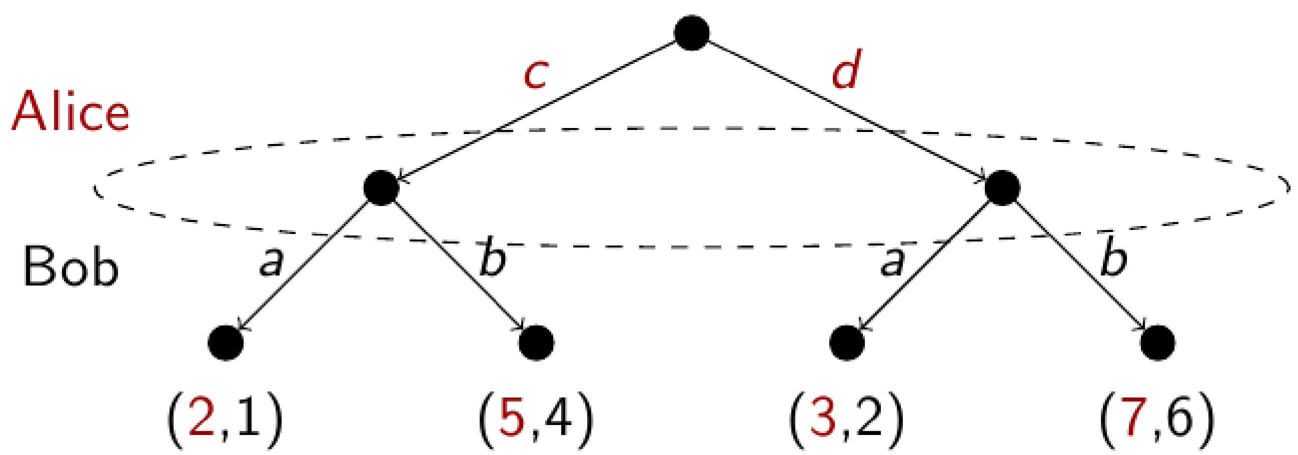
- prikaz stablom



TEORIJA IGARA

Igre u proširenom obliku (engl. games in extended form)

- igre u **normalnom** obliku (simultane odluke) moguće je predstaviti na isti način, uz grupiranje (crtkana elipsa) akcija koje su sa stajališta drugih agenata ekvivalentne, jer im nisu vidljive u trenutku donošenja odluke



TEORIJA IGARA

Igre u proširenom obliku (engl. games in extended form)

Rješenja:

(a) Može se primijeniti koncept **Nashove ravnoteže** (engl. Nash equilibrium)

(b) **Savršena ravnoteža podigre** (engl. subgame perfect equilibrium)

- podigra = bilo koje podstablo igre u proširenom obliku
- *s** je savršena ravnoteža podigre ako za sve agente *i* i sve podigre vrijedi da agent *i* ne može ostvariti veću korist odabirom bilo koje druge strategije različite od *s**.

- Igre u proširenom obliku – slične višeagentskom Markovljevom procesu odlučivanja (MDP); u praksi češće se koristi višeagentski MDP

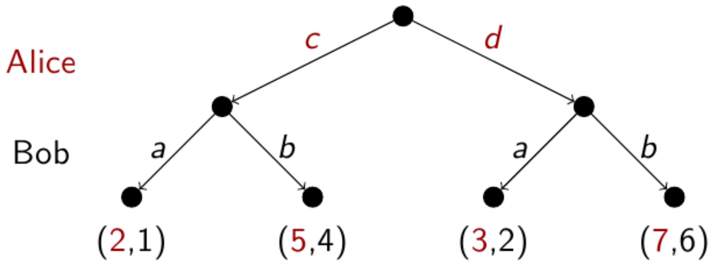
TEORIJA IGARA

Igre u proširenom obliku (engl. games in extended form)

Nashova ravnoteža igre u proširenom obliku

- pretvoriti igru u ekvivalentnu igru u normalnom obliku
  - Strategija svakog agenta je popis odluka u svakom čvoru neovisno o tome je li u taj čvor moguće doći s obzirom na odluke u drugim čvorovima
- Primjer:

Alice: {c, d}
Bob: {aa, ab, ba, bb}

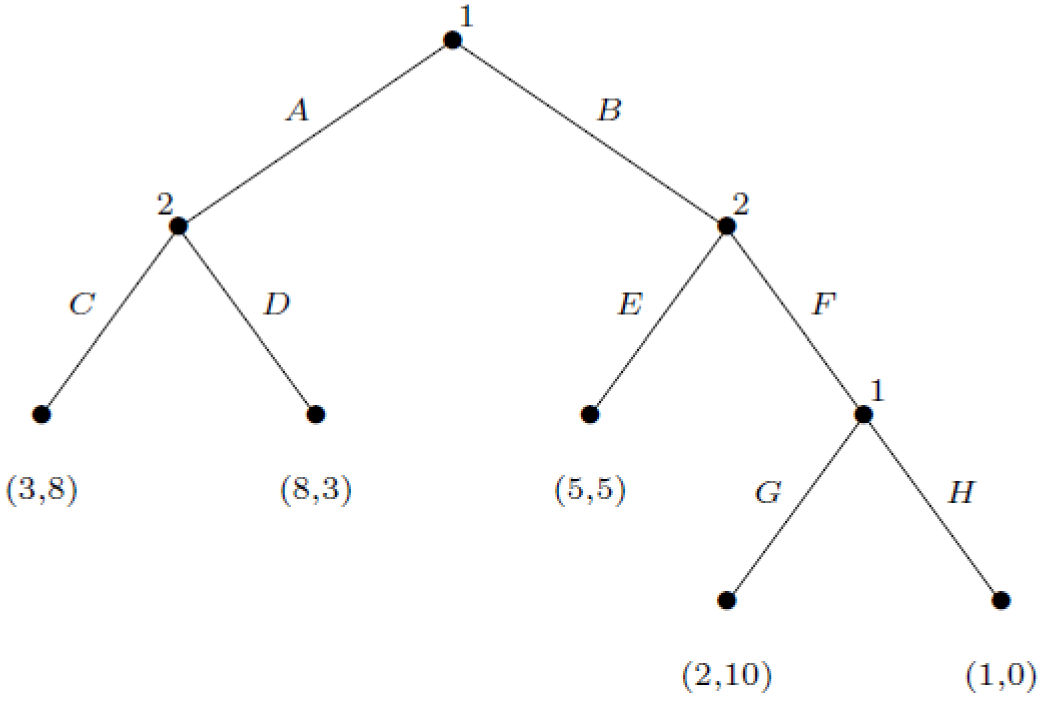


TEORIJA IGARA

Igre u proširenom obliku (engl. games in extended form)

Nashova ravnoteža igre u proširenom obliku

- Primjer 2



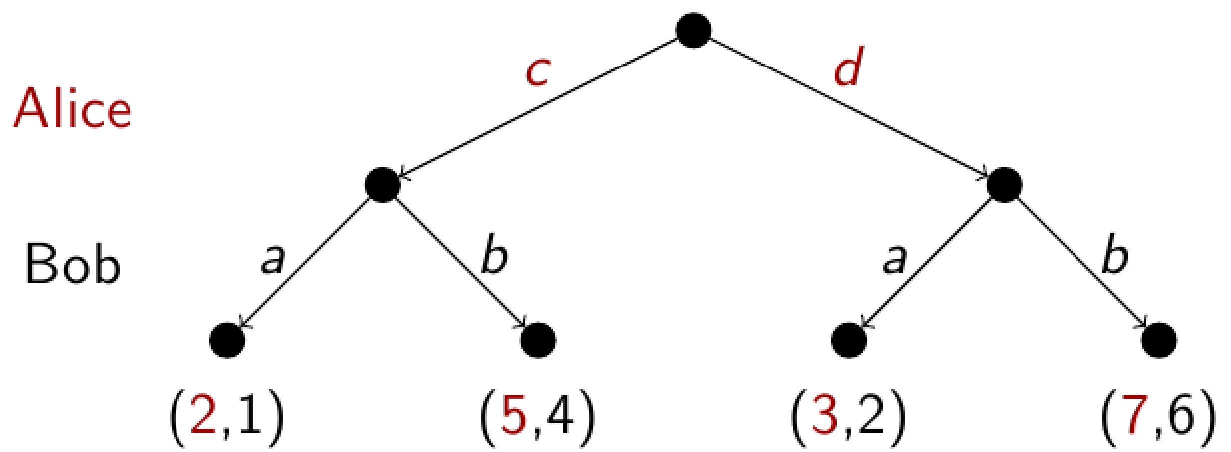
	(C,E)	(C,F)	(D,E)	(D,F)
(A,G)	3, 8	3, 8	8, 3	8, 3
(A,H)	3, 8	3, 8	8, 3	8, 3
(B,G)	5, 5	2, 10	5, 5	2, 10
(B,H)	5, 5	1, 0	5, 5	1, 0

TEORIJA IGARA

Igre u proširenom obliku (engl. games in extended form)

Savršena ravnoteža podigre (engl. subgame perfect equilibrium)

Primjer



Savršena ravnoteža:

- za lijevo podstablo (Alice igra “c”) - savršena ravnoteža podigre = b
- za desno podstablo (Alice igra “d”) - savršena ravnoteža podigre = b
- za ukupno stablo – savršena ravnoteža podigre = d