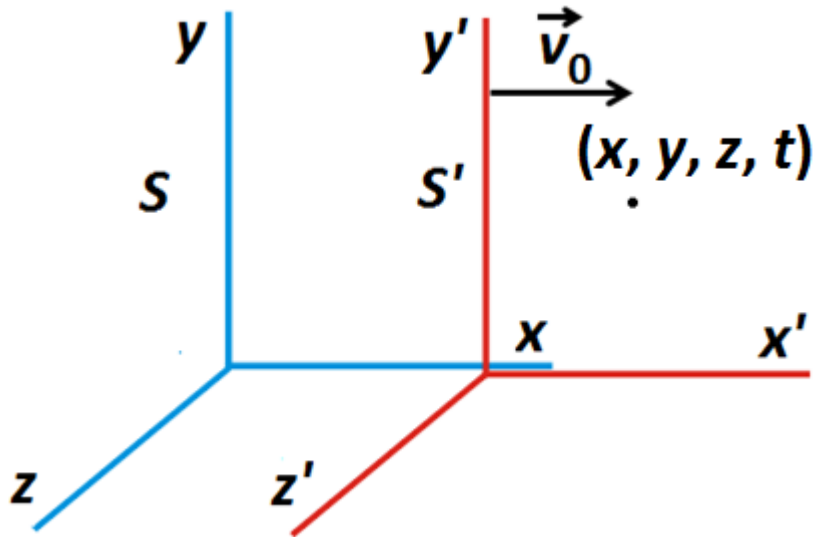


Specijalna teorija relativnosti



Inercijski sustavi i Galilejeve transformacije



$$\begin{aligned}x &= x' + v_0 t \\y &= y' \\z &= z' \\t &= t'\end{aligned}$$

$$\vec{x} = \vec{x}' + \vec{v}_0 t$$

$$\vec{u} = \vec{u}' + \vec{v}_0$$

➤ Događaj – mjera gdje je nešto i kada je to nešto tamo

$$(x, y, z, t)$$

Relativnost

- **Galileieva (Newtonova) relativnost**
 - zakoni mehanike ($F = ma$) jednaki su u svim inercijskim sustavima



- **Einsteinova relativnost**
 - zakoni fizike jednaki su u svim inercijskim sustavima



Širenje svjetlosti

- Maxwell: svjetlost je elektromagnetski val

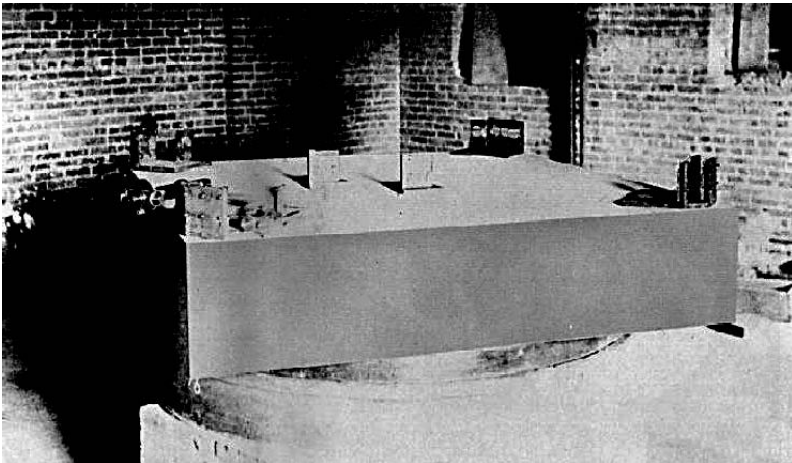
$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

- Zvučni val širi se kroz zrak brzinom 330 m/s u odnosu na zrak
- Val na vodi širi se brzinom 1-100 m/s u odnosu na vodu
- Elektromagnetski val (svjetlost) širi se kroz...

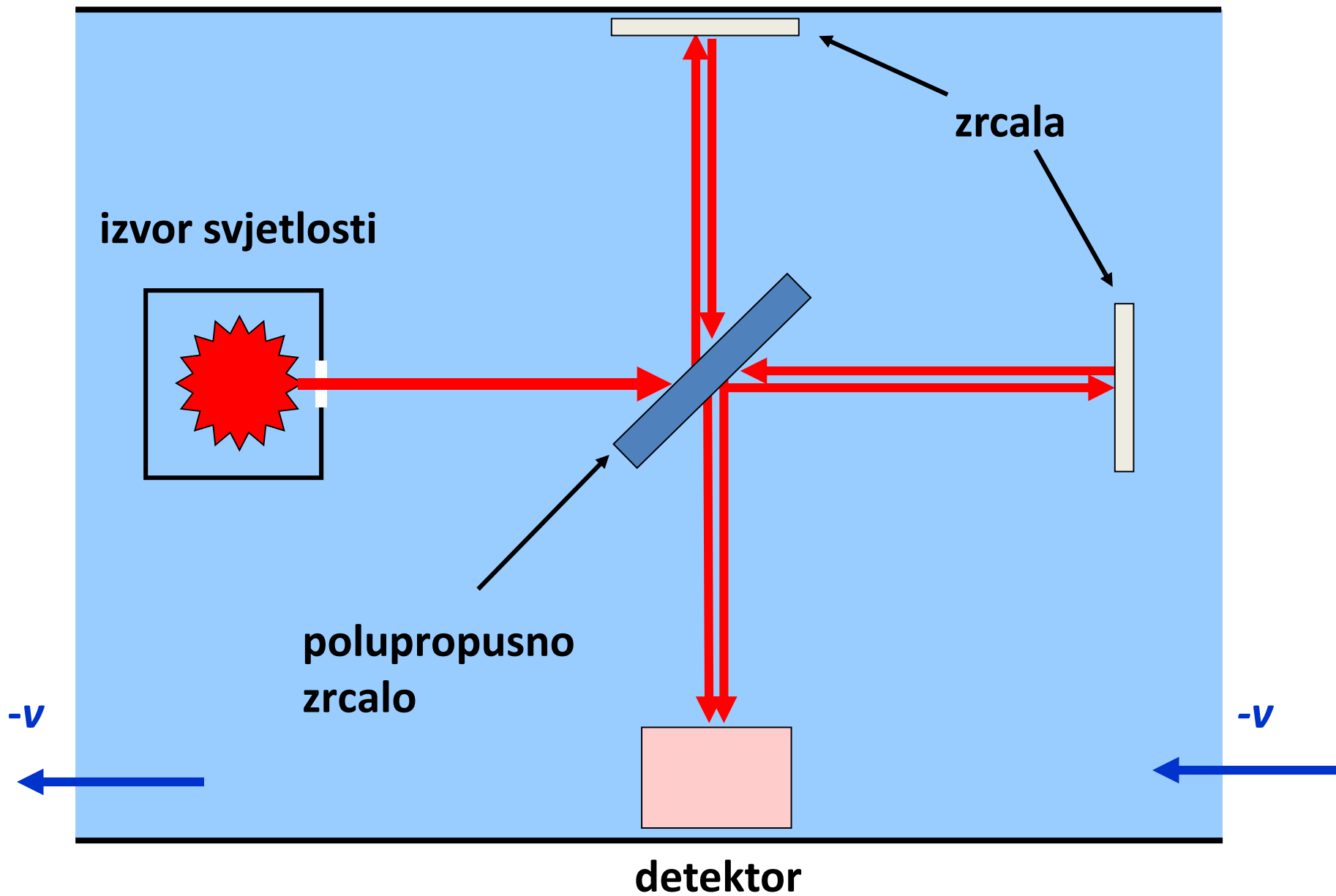
19. st. *eter*

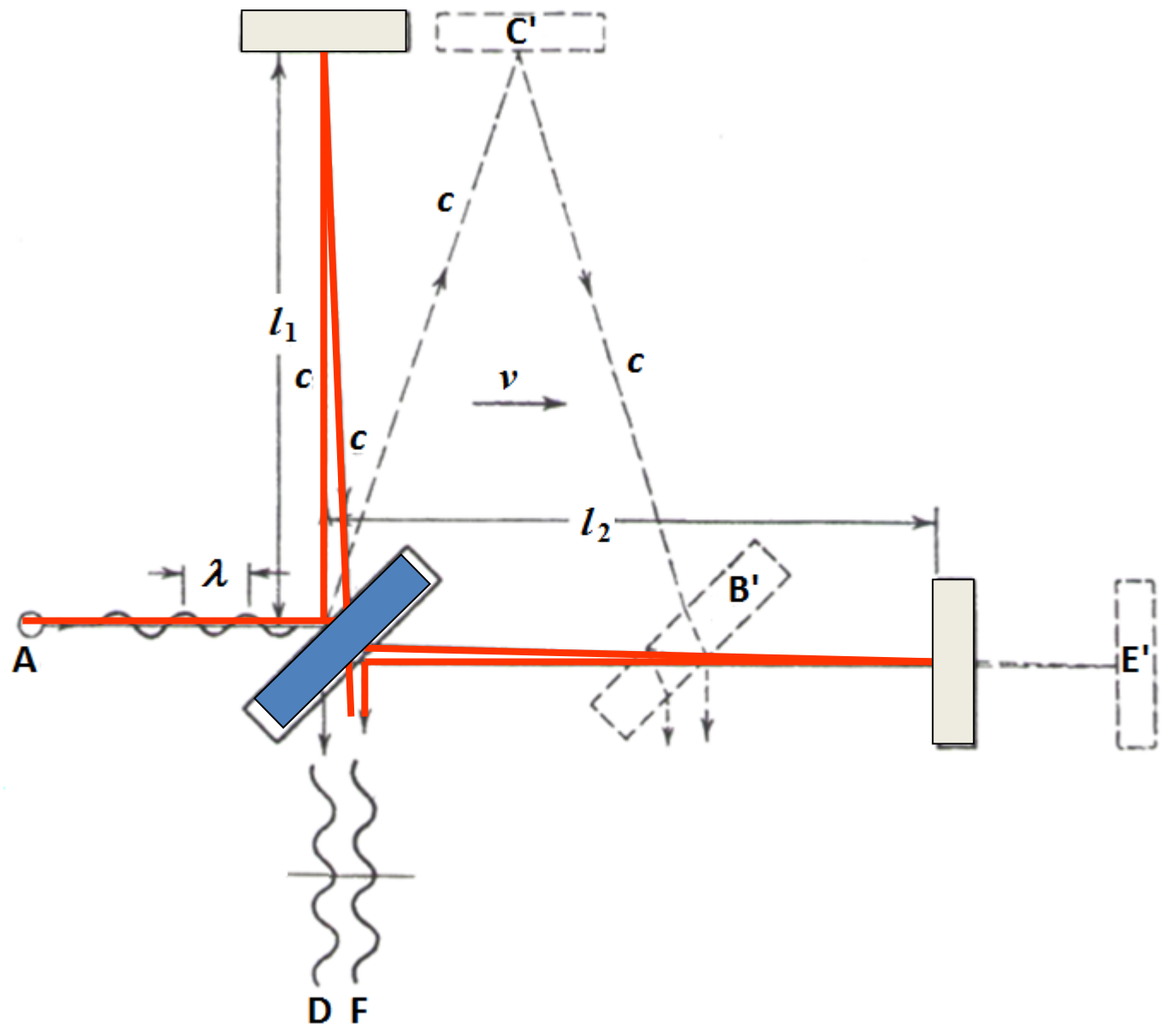
Michelson-Morleyev eksperiment

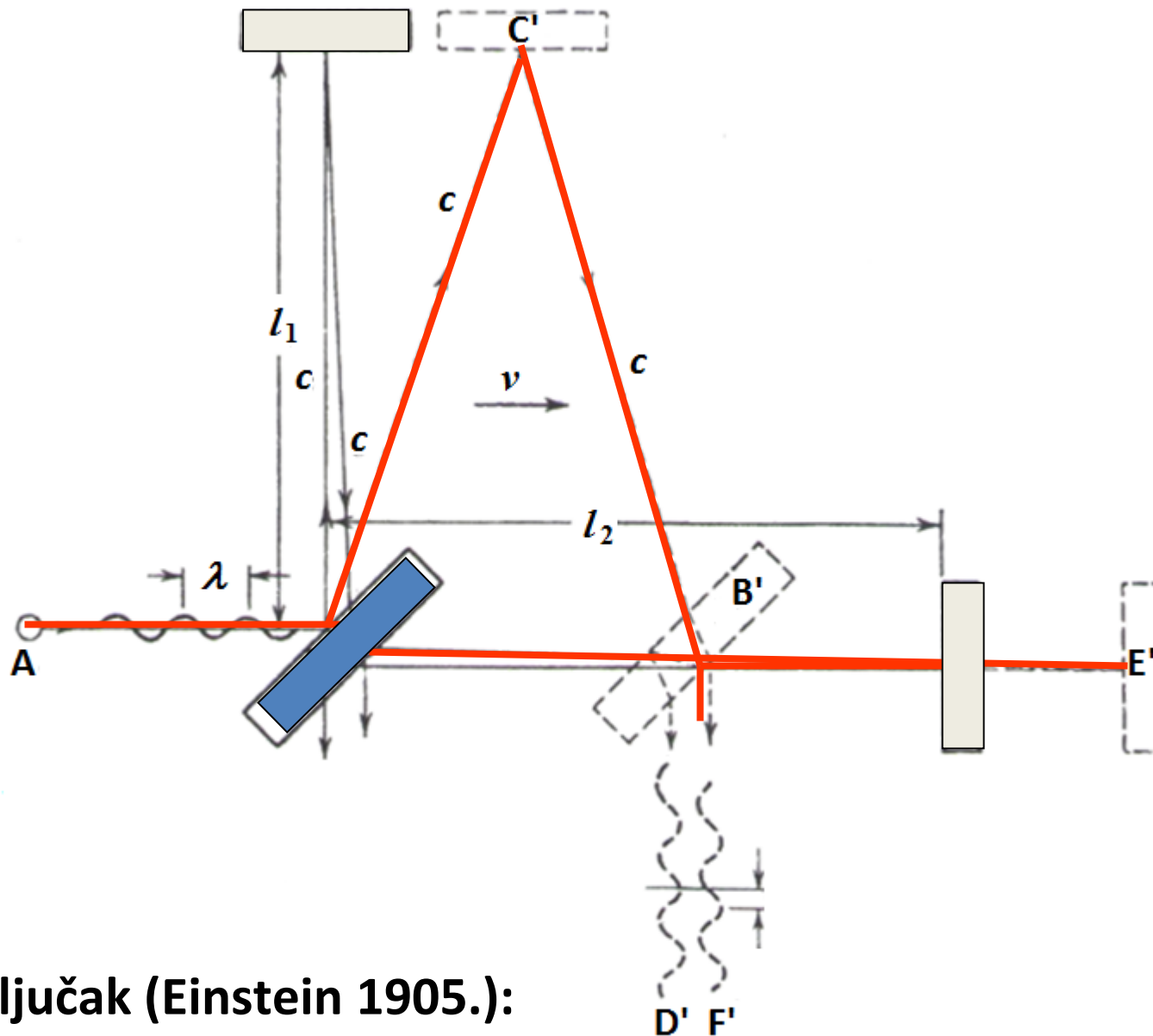
- 1887. mjerenje brzine svjetlosti u raznim smjerovima u odnosu na gibanje etera



Michelson-Morleyev eksperiment







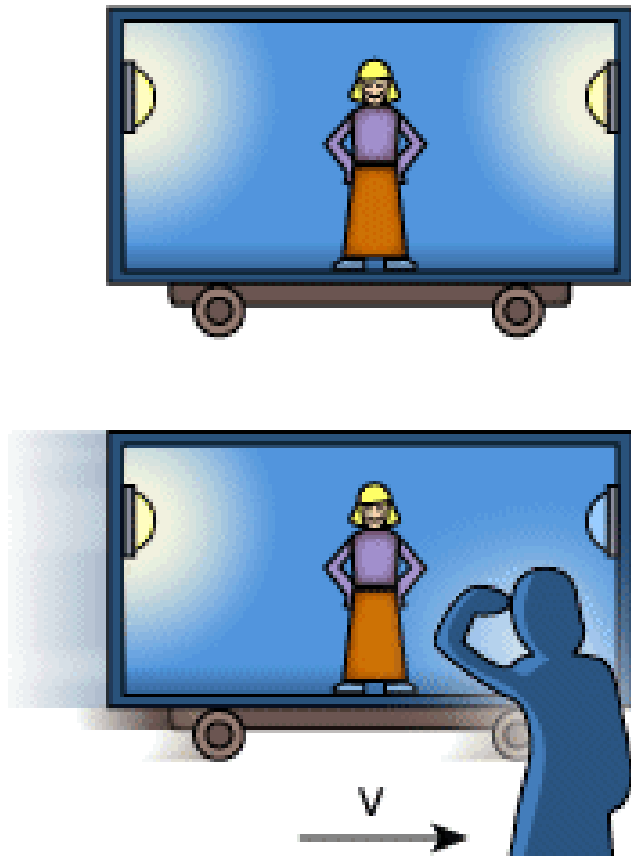
Zaključak (Einstein 1905.):

- **Brzina svjetlosti jednaka je u svim inercijskim sustavima**

Einsteinovi postulati specijalne teorije relativnosti*

- **Svi fizikalni zakoni imaju isti oblik u svim inercijskim sustavima (sustavima koji se jedan u odnosu na drugog gibaju jednoliko po pravcu).**
- **Brzina svjetlosti u vakuumu c jednaka je u svim inercijskim sustavima i ne ovisi o gibanju izvora ili promatrača.**

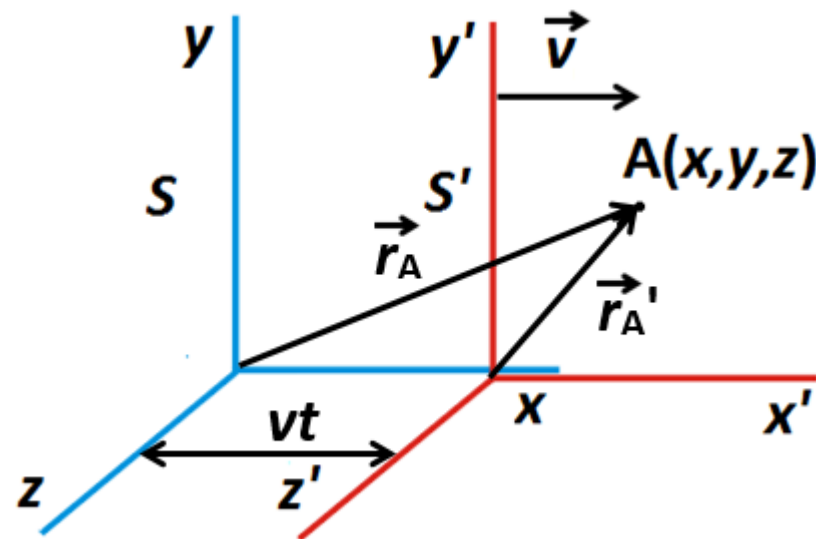
Relativnost istodobnosti



- promatrači u dva sustava se ne moraju slagati oko toga je li neki događaj istodoban, čak se ne moraju slagati ni oko toga koji je događaj bio ranije

Lorentzove transformacije*

- 1) trebaju prijeći u Galilejeve transformacije za $v \ll c$
- 2) trebaju biti simetrične za $v \rightarrow -v$ jer su inercijalni sustavi ekvivalentni (ne može se utvrditi tko se giba a tko miruje)
- 3) trebaju biti linearne funkcije koordinata i vremena jer je prostor izotropan i homogen
$$x = ax' + bt'$$
- 4) trebaju dati zbrajanje brzina takvo da brzina svjetlosti bude uvijek c



Lorentzove transformacije*

$$3) \Rightarrow x = ax' + bt = a \left(x' + \frac{b}{a} t' \right)$$

$$x = \gamma(x' + vt')$$

$$2) \Rightarrow x' = \gamma(x - vt)$$

➤ u početnom trenutku sustavi se poklapaju

➤ svjetlosni signal poslan je duž x-osi

$$x = ct = \gamma(x' + vt') = \gamma(ct' + vt') = \gamma t'(c + v)$$

$$x' = ct' = \gamma(x - vt) = \gamma(ct - vt) = \gamma t(c - v)$$

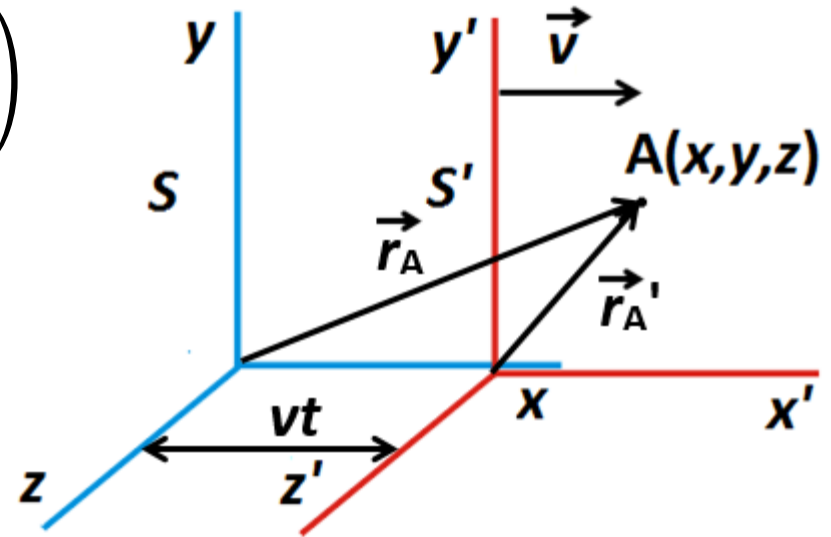
$$t' = \frac{\gamma t(c - v)}{c}$$

$$ct = \gamma \frac{\gamma t(c - v)}{c} (c + v)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$t = \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$



Lorentzove transformacije*

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

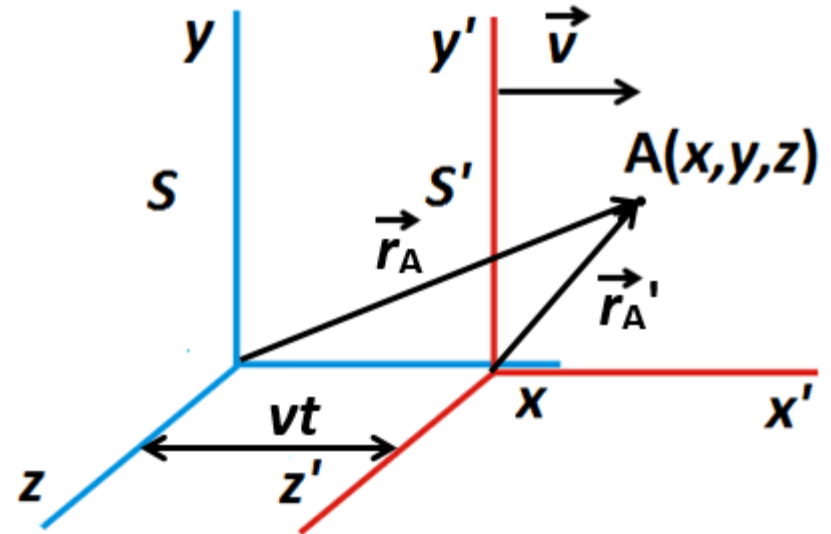
$$t = \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$



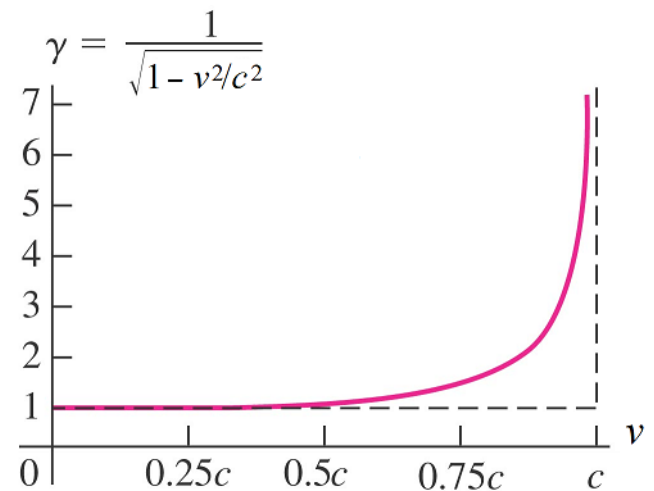
za $v \ll c$

$$x = x' + vt$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$t = t'$$



Zbrajanje brzina

➤ u_x brzina u sustavu S, u_x' brzina u sustavu S'

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} [\gamma(x' + vt')] = \frac{dt'}{dt} \frac{d}{dt'} [\gamma(x' + vt')]$$

$$t = \gamma(t' + vx'/c^2) \quad \frac{dt'}{dt} = \frac{1}{\frac{dt}{dt'}} = \frac{1}{\gamma(1 + vu_x'/c^2)}$$

$$u_x = \frac{1}{\gamma(1 + vu_x'/c^2)} [\gamma(u_x' + v)] = \frac{u_x' + v}{1 + vu_x'/c^2}$$

$$u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dt' dy'}{dt dt'} = \frac{u_y'}{\gamma(1 + vu_x'/c^2)} = \frac{u_y' \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + vu_x'/c^2}$$

$$u_z = \frac{u_z' \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + vu_x'/c^2}$$

Zbrajanje brzina

$$u_x = \frac{u_x' + v}{1 + vu_x'/c^2}$$

$$u_y = \frac{u_y' \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + vu_x'/c^2}$$

$$u_z = \frac{u_z' \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + vu_x'/c^2}$$

$$u_x' = \frac{u_x - v}{1 - vu_x'/c^2}$$

$$u_y' = \frac{u_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - vu_x'/c^2}$$

$$u_z' = \frac{u_z \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - vu_x'/c^2}$$

za $v \ll c$

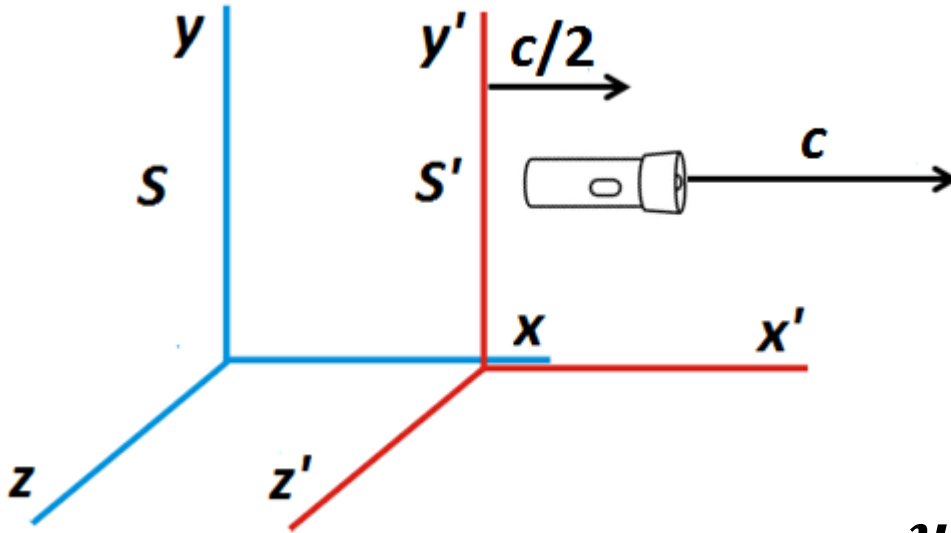
$$u_x = u_x' + v$$

$$u_y = u_y'$$

$$u_z = u_z'$$

Primjer zbrajanja brzina

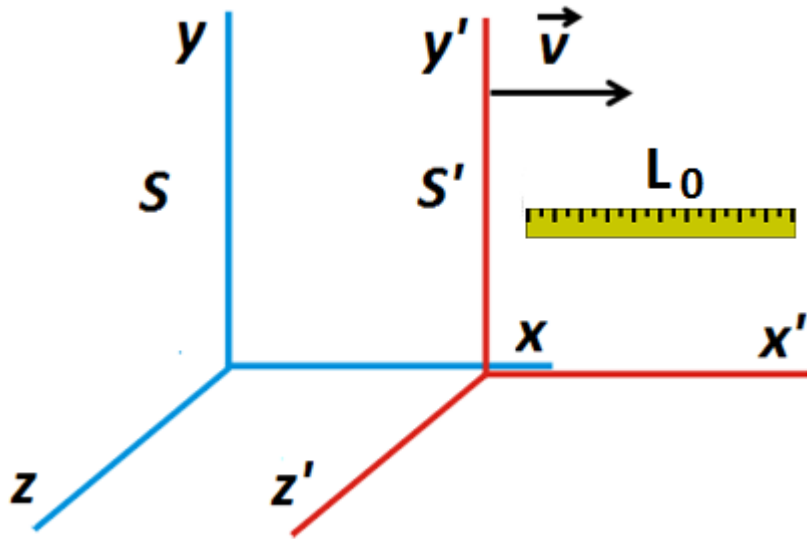
Kolika je brzina svjetlosti iz svjetiljke koja se giba brzinom $c/2$ u sustavu S ?



$$u_x = \frac{u_x' + v}{1 + vu_x'/c^2}$$

$$u_x = \frac{c + \frac{c}{2}}{1 + \frac{\frac{c}{2} \cdot c}{c^2}} = \frac{\frac{3}{2}c}{\frac{3}{2}} = c$$

Kontrakcija dužina*



$$L_0 = x'_2 - x'_1$$

—
|
vlastita duljina – duljina štapa u sustavu S' u kojem štap miruje

$$L = x_2 - x_1$$

—
|
duljina štapa u sustavu S

$$x'_1 = \gamma(x_1 - vt_1) \quad x'_2 = \gamma(x_2 - vt_2)$$

➤ koordinate se mjere u istom trenutku $t_1 = t_2$

$$x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - vt_2 - x_1 + vt_2) = \gamma(x_2 - x_1)$$

$$L_0 = \gamma L$$

$$L = \frac{L_0}{\gamma} = L_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

$$L < L_0$$

➤ u sustavu S štap je kraći nego u sustavu S'

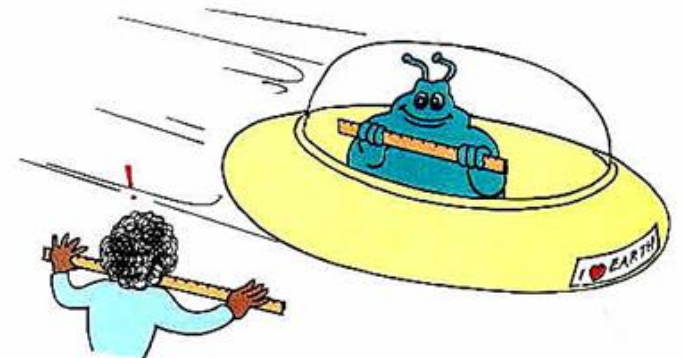
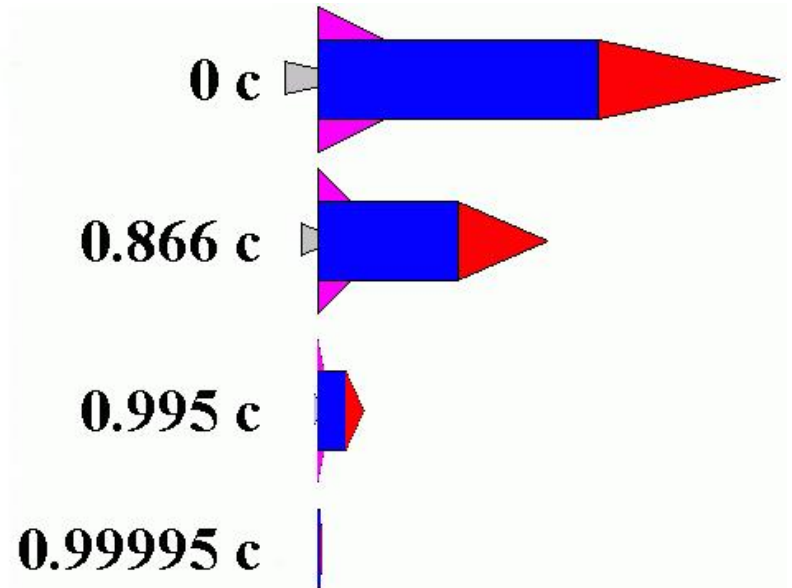
Primjer kontrakcije dužine

Raketa je duga 120 m i promjer joj je 20 m dok miruje u odnosu na promatrača. Koliki su duljina i promjer rakete ako se giba brzinom $0.99 c$ u odnosu na promatrača?

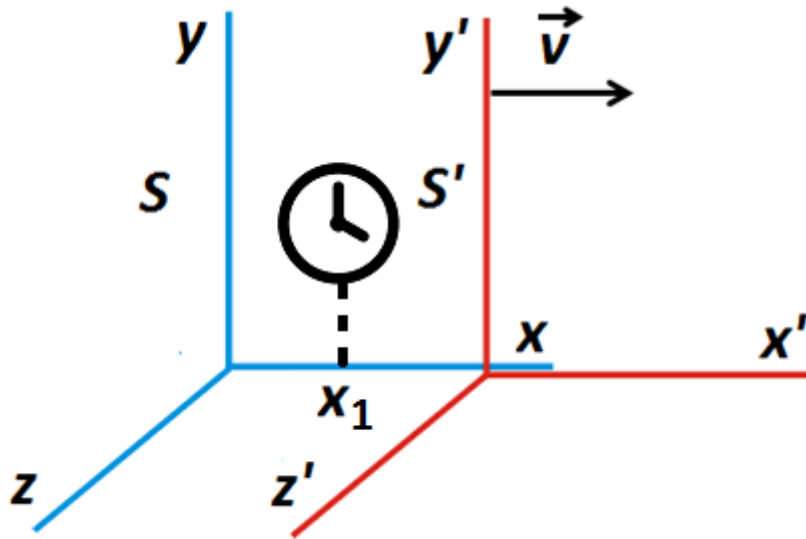
$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$L = 120 \text{ m} \sqrt{1 - \frac{(0.99c)^2}{c^2}} = 17 \text{ m}$$

- Promjer rakete jednak je u oba sustava



Dilatacija vremena*



➤ sat se nalazi u sustavu S u
točki x_1

$\Delta t_0 = t_2 - t_1$ u sustavu S
|
vlastito vrijeme – vremenski
interval između dva događaja
koje mjeri promatrač koji vidi
oba događaja na istom mjestu

$\Delta t' = t'_2 - t'_1$
|
vrijeme u sustavu S' koji se giba
u odnosu na sat

$$\Delta t' > \Delta t_0$$

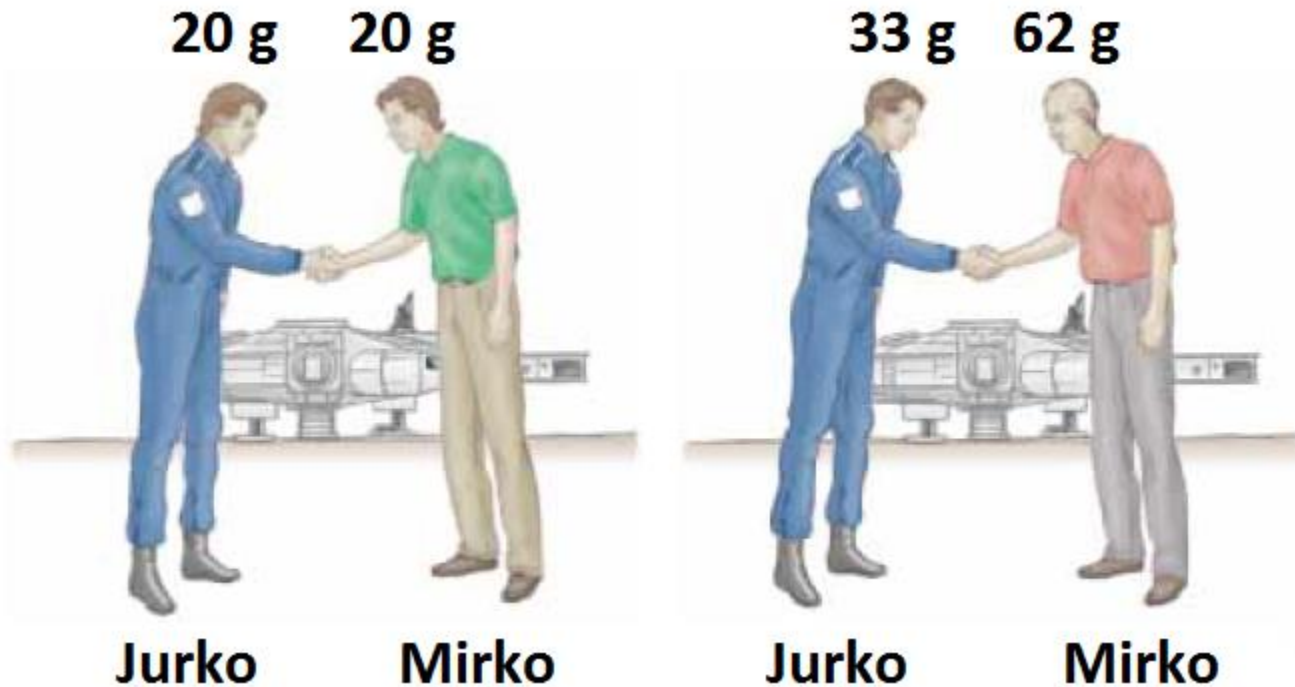
$$t'_1 = \frac{t_1 - vx_1/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$
$$t'_2 = \frac{t_2 - vx_1/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\Delta t' = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma \Delta t_0$$

➤ Vrijeme ide sporije u sustavu koji
se giba u odnosu na mirni sat

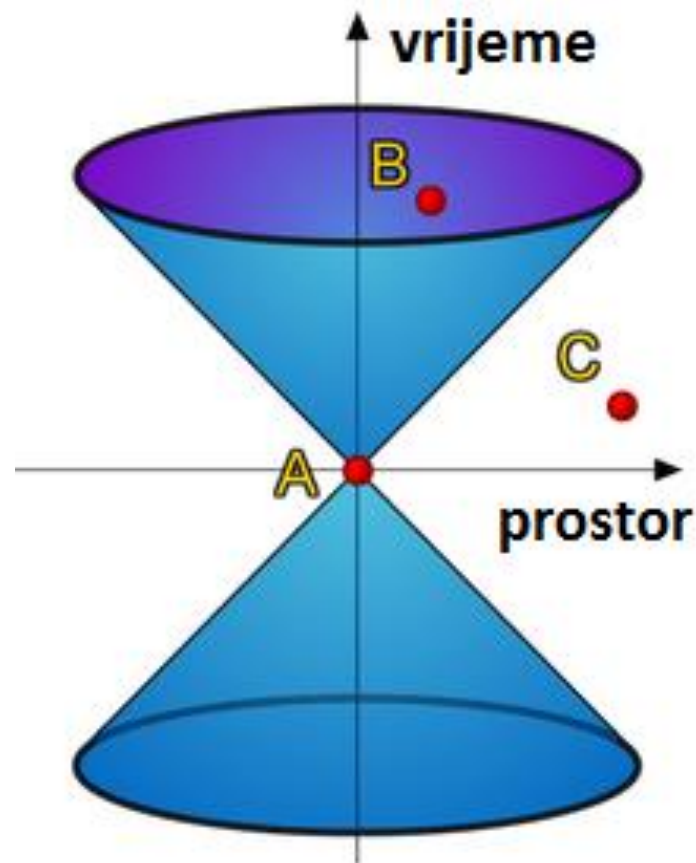
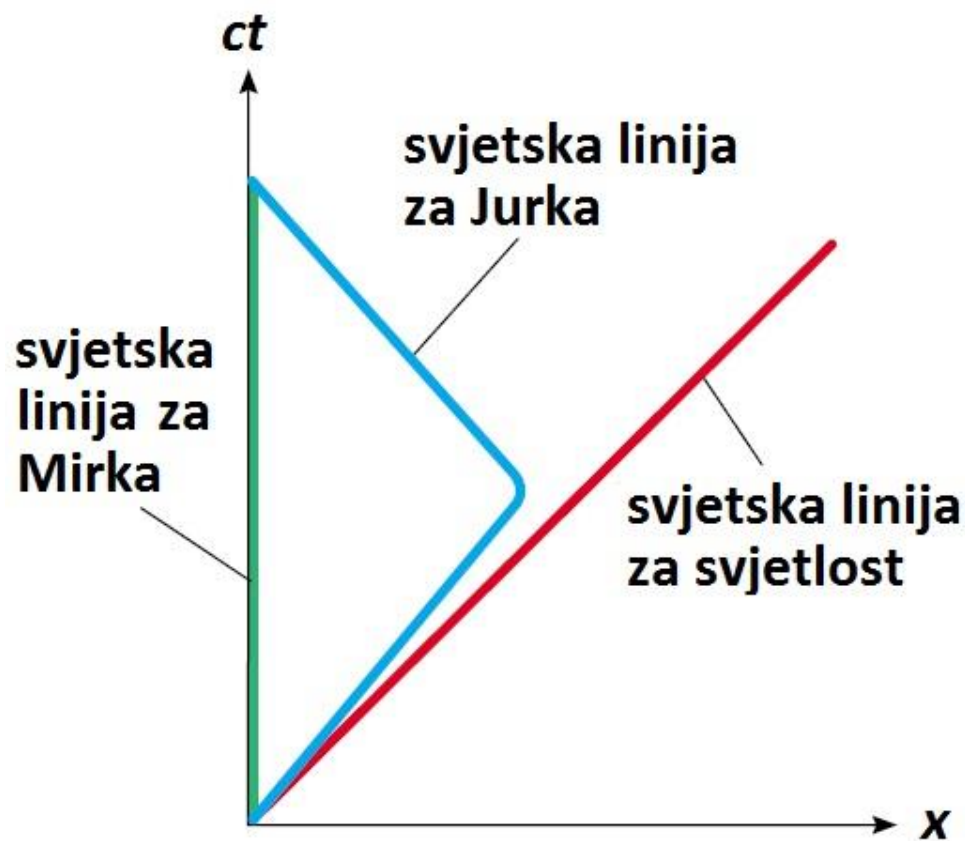
Paradoks blizanaca

- Jurko otputuje na planet udaljen 20 sg brzinom $0.95 c$ u odnosu na Zemlju gdje ostane Mirko



- Ekvivalentni sustavi? – Tko je više ostario Mirko ili Jurko?

Prostorno-vremenski dijagrami



Raspad miona

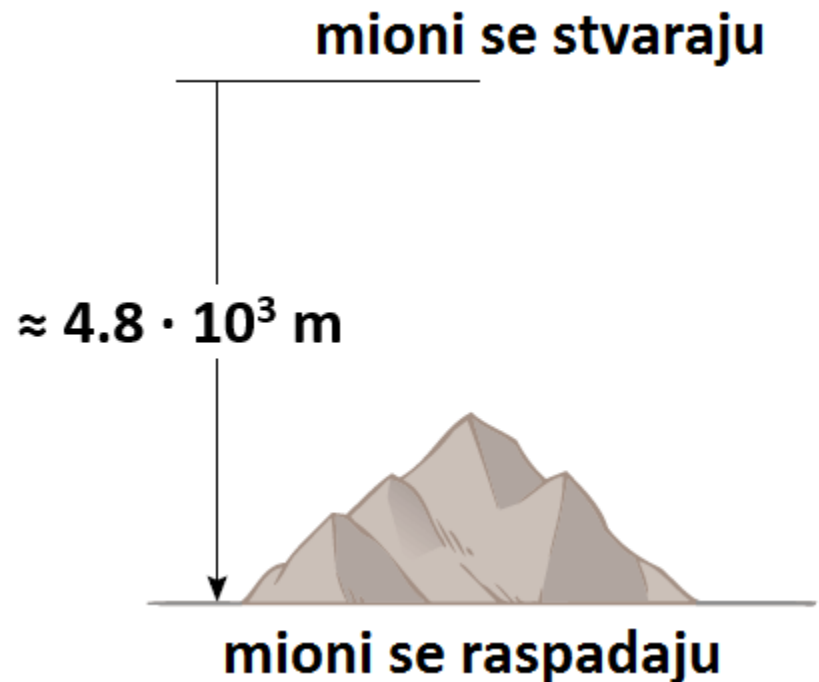
- mioni nastaju u sudaru kozmičkog zračenja s atomima u višim dijelovima atmosfere
- vrijeme poluživota sporih miona

$$\Delta t_0 = 2.2 \mu s$$

$$c\Delta t_0 = 6.6 \cdot 10^2 \text{ m}$$

$$\Delta t = \gamma\Delta t_0 = 16 \mu s$$

$$0.99c\Delta t = 4.8 \cdot 10^3 \text{ m}$$



Relativistička dinamika*

- Einstein: Svi fizikalni zakoni imaju isti oblik u svim inercijskim sustavima.
- Za relativističku količinu gibanja treba vrijediti:
 - 1) zakon očuvanja količine gibanja
 - 2) za $v \ll c$ treba dobiti klasični izraz za količinu gibanja

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v}$$

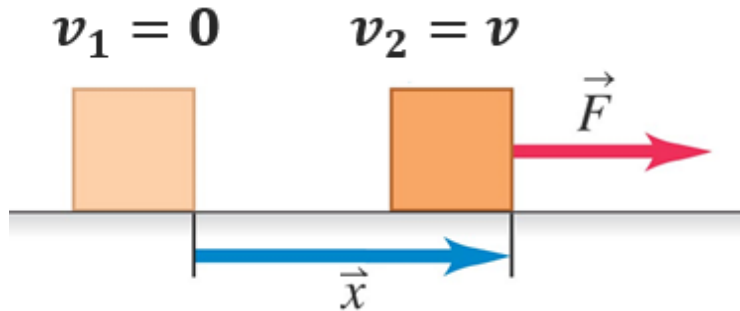
$$\vec{p} = \frac{m \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

relativistička
količina gibanja

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{m \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

relativistička
jednadžba gibanja

Relativistička energija*



Teorem o radu i energiju
energiju

$$W_{1,2} = \Delta E_k \quad \int_{x_1}^{x_2} F dx = \frac{1}{2} mv^2$$

$$W = \int_1^2 F dx = \int_1^2 \frac{dp}{dt} dx = \int_1^2 \frac{dp}{dt} v dt = \int_1^2 v dp \quad d(vp) = p dv + v dp$$

$$W = \int_0^v d(vp) - \int_0^v p dv = \gamma m v^2 - \int_0^v \frac{m v dv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma m c^2 - m c^2 = E_k$$

$$\gamma m c^2 = m c^2 + E_k$$

$$E = E_0 + E_k$$

$$E_0 = m c^2$$

energija mirovanja

za $v \ll c$

$$E_k = m c^2 (1 - v^2/c^2)^{-1/2} - m c^2 = m c^2 (1 + v^2/2c^2) - m c^2 = \frac{1}{2} m v^2$$

Veza između energije i količine gibanja

$$p = \gamma m v$$
$$E = \gamma m c^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{v}{c} = \frac{pc}{E}$$

➤ za čestice bez mase ($m = 0$)
npr. fotone

$$E^2 = \frac{m^2 c^4}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{m^2 c^4}{1 - \left(\frac{pc}{E}\right)^2}$$

$$E = pc$$

$$E_0 = 0$$

$$E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2$$

$$E_k = E = pc$$

$$E^2 = E_0^2 + p^2 c^2$$

$$v = c$$

Astronom sa Zemlje otkrije da se meteor udaljen 20 svjetlosnih godina približava Zemlji brzinom $0.8c$.

- a) Koliko vrijeme potrebno da meteor stigne na Zemlju mjeri astronom na Zemlji?**
- b) Koliko vrijeme potrebno da meteor stigne na Zemlju mjeri turist na meteoru?**
- c) Koliku udaljenost do Zemlje mjeri turist na meteoru?**

(25 god, 15 god, 12 svj. god.)

Blizanci Mirko i Jurko istovremeno krenu na put prema planetu X u različitim svemirskim brodovima. Mirko putuje brzinom $0.75c$, a Jurko $0.95c$. Udaljenost između Zemlje i planeta X je 20 svjetlosnih godina u referentnom sustavu u kojem oba planeta miruju. Kolika je razlika u godinama između Mirka i Jurka u trenutku kada Mirko stigne na planet X? Koji je blizanac stariji?

(Mirko je stariji 5.45 god.)

Nestabilna čestica mase $3.34 \cdot 10^{-27}$ kg koja miruje raspadne se na dva dijela koji se gibaju brzinama $0.987c$ i $-0.868c$ duž x osi. Kolike su mase tih novih čestica?

$(8.84 \cdot 10^{-28}$ kg, $2.51 \cdot 10^{-28}$ kg)

Snaga Sunca je $3.77 \cdot 10^{26}$ W. Koliko se mase Sunca pretvori u energiju u svakoj sekundi?

$(4.19 \cdot 10^9 \text{ kg/s})$