Dodatno poglavlje -Poglavlje 9

DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE

U ovom poglavlju:

- Direktna integracija
- Separacija varijabli
- Linearna diferencijalna jednadžba
- Bernoullijeva diferencijalna jednadžba
- Diferencijalna jednadžba homogenog stupnja
- Egzaktna diferencijalna jednadžba

Dajemo nekoliko karakterističnih primjera diferencijalnih jednadžbi, gdje funkcija $y = y(x)$ predstavlja traženo rješenje, dok y' obilježava njenu derivaciju, odnosno $y' = \frac{dy}{dx}$:

i) diferencijalna jedandžba koja se rješava metodom direktne integracije

$$y' = e^{3x};$$

ii) diferencijalna jedandžba koja se rješava metodom separacije varijabli

$$x^2 y' = y(y-3);$$

iii) linearna diferencijalna jednadžbe

$$y' + 2xy = x^3 e^{-x^2};$$

iv) Bernoullijeva diferencijalna jednadžba

$$y' - y = xe^{5x} y^3;$$

v) egzaktna diferencijalna jednadžba

$$\frac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0;$$

vi) diferencijalna jedandžba homogenog stupnja

$$(x^2 - 3y^2)dx + xydy = 0.$$

Naravno, postoje još mnogi drugi tipovi diferencijalnih jednadžbi prvog reda. Tipovi koje smo gore naveli i koje ćemo detaljno raditi se najčešće pojavljuju u nastavnom procesu.

Primjetimo da pod rješenjem diferencijalne jednadžbe $y' = F(x, y(x))$ podrazumjevamo funkciju $y = y(x)$ koja zadovoljava tu jednadžbu u smislu da nakon uvrštavanja te funkcije u $y' = F(x, y(x))$ imamo valjanu jednakost. Na primjer, funkcija $y = e^{3x} - 1$ zadovoljava diferencijalnu jedandžbu $y' - y = 2e^{3x} + 1$, jer kad je uvrstimo u danu jednakost dobivamo 0 = 0. Kažemo još da je funkcija $y = e^{3x} - 1$ jedno konkretno ili takozvano *partikularno rješenje* ove jednadžbe. Međutim, to nisu sva njena rješenja. Sva njena rješenja, takozvano *opće rješenje*, imaju nakon rješavanje dane jednadžbe $y' - y = 2e^{3x} + 1$ oblik $y = c \cdot e^{x} + e^{3x} - 1$, gdje je c proizvoljna konstanta. Znači, trebamo razlikovati pojam općeg rješenja od pojma partikularnog rješenja neke diferencijalne jednadžbe

---

9.1 DIREKTNA INTEGRACIJA

Mali broj diferencijalnih jednadžbi možemo riješiti samo direktnom integracijom. Međutim, kad tad, nakon primjene raznih metoda, diferencijalnu jednadžbu dovodimo u oblik za direktno integriranje. Metodu direktnog integriranja ćemo objasniti na slijedećim primjerima.

☺ 670. $y' = e^{3x} \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = \int e^{3x} dx = \frac{1}{3} e^{3x} + c \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{1}{3} e^{3x} + c.$

☺ 671. $y' = (x^3 + 1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = \int (x^3 + 1)^2 \, dx = \int x^6 dx + 2\int x^3 dx + \int dx = \frac{x^7}{7} + \frac{x^4}{2} + x + c$

$$\Rightarrow \quad y(x) = \frac{x^7}{7} + \frac{x^4}{2} + x + c.$$

☺ 672. $y' = x \sin x \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = \int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x$

$$\Rightarrow \quad y(x) = -x \cos x + \sin x + c.$$

☺ 673. $\begin{cases} y' = x^3 + 4x \\ y(0) = 1 \end{cases}$; potrebno je prvo naći opće rješenje, a potom samo ono koje zadovoljava početni uvjet $y(0) = 1$;

i) $y' = x^3 + 4x \quad \Rightarrow \quad y(x) = \int (x^3 + 4x) dx = \frac{x^4}{4} + 2x^2 + c$,

ii) $y(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad y(0) = \frac{0^4}{4} + 2 \cdot 0^2 + c = \cancel{0} \quad \Rightarrow \quad c = \cancel{0}$,

iii) rješenje: $y(x) = \frac{x^4}{4} + 2x^2\cancel{.}$ **APPROVED**

☺ 674. $\begin{cases} y' = \dfrac{\sin x}{\cos x} \\ y(\pi/4) = 1 \end{cases}$

i) $y' = \dfrac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow y(x) = \displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\ln\cos x + c$,

ii) $y(\pi/4) = 1 \Rightarrow y(\pi/4) = -\ln\cos(\pi/4) + c = 1 \Rightarrow c = 1 - \ln\sqrt{2}$,

iii) rješenje: $y(x) = -\ln\cos x + 1 - \ln\sqrt{2}.$

☺ 675. $\begin{cases} y' = xe^{3x} \\ y(1) = 0 \end{cases}$

i) $y' = xe^{3x} \Rightarrow y(x) = \displaystyle\int xe^{3x} dx = \frac{xe^{3x}}{3} - \frac{1}{3}\int e^{3x} dx = \frac{xe^{3x}}{3} - \frac{1}{9}e^{3x} + c$,

ii) $y(1) = 0 \Rightarrow y(1) = \dfrac{e^3}{3} - \dfrac{e^3}{9} + c = 0 \Rightarrow c = -\dfrac{2}{9}e^3$,

iii) rješenje: $y(x) = \dfrac{xe^{3x}}{3} - \dfrac{e^{3x}}{9} - \dfrac{2}{9}e^3.$

☺ 676. $\begin{cases} y' = \dfrac{\ln x}{x} \\ y(1) = 0 \end{cases}$

i) $y' = \dfrac{\ln x}{x} \Rightarrow y(x) = \displaystyle\int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2}\ln^2 x + c$,

ii) $y(1) = 0 \Rightarrow y(1) = \dfrac{1}{2}\ln^2 1 + c = 0 \Rightarrow c = 0$,

iii) rješenje: $y(x) = \dfrac{1}{2}\ln^2 x.$

♠PRIMJEDBA♠

Kako vidimo, već u nekoliko primjera rješavanja diferencijalnih jednadžbi, neodređeni integrali igraju ključnu ulogu, te stoga preporučamo da se vratite na Poglavlje 7, te ponovite osnovne tipove i metode za rješavanje neodređenih integrala. Naravno u složenijim tipovima diferencijalnih jednadžbi osim neodređenih integrala potrebno je i znati algoritam za rješavanje dotičnog tipa jednadžbe.

9.2 SEPARACIJA VARIJABLI

Sada prelazimo na primjere onih diferencijalnih jednadžbi koje se rješavaju metodom separacije varijabli. Sama riječ kaže da treba u danoj diferencijalnoj jednadžbi razdvojiti varijable y i x na dvije različite strane jednakosti. Pri tome, prvo treba separirati derivaciju odnosno trebamo je zapisati u obliku $y' = \dfrac{dy}{dx}$. Kada se izvrši separacija, tada direktnim integriranje obadviju strana jednakosti, dolazimo do rješenja dane jednadžbe. Primjetimo, da se mali broj jednadžbi može riješiti samo separacijom. Međutim, veći broj jednadžbi se može raznim metodama dovesti na separaciju varijable.

☺ 677. $y' = \dfrac{5y}{x(y-3)} \iff \dfrac{(y-3)dy}{y} = \cancel{x}dx \iff \int (1-\dfrac{3}{y})dy = \int \cancel{x}dx$;

Rješenja: $y - 3\ln y = \cancel{\dfrac{1}{2}x^2} + c$.

APPROVED

☺ 678. $x^2 y' = y(y-1) \iff \dfrac{dy}{y(y-1)} = \dfrac{1}{x^2}dx \iff \int (\dfrac{1}{y-1} - \dfrac{1}{y})dy = \int \dfrac{1}{x^2}dx$

$\Rightarrow \quad \ln(y-1) - \ln y = -\dfrac{1}{x} + c$; Rješenja: $y(x) = \dfrac{1}{1 - c\cdot \cancel{e^{1/x}}}$ i $y(x) = 0$.

APPROVED

☺ 679. $x^3 y' = \sqrt{1-y^2} \iff \dfrac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \dfrac{1}{x^3}dx \iff \int \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}dy = \int \dfrac{1}{x^3}dx$

$\Rightarrow \quad \arcsin y = -\dfrac{1}{2x^2} + c$; Rješenja: $y(x) = -\sin(\dfrac{1}{2x^2} + c)$.

APPROVED

☺ 680. $yy' = e^x \iff ydy = e^x dx \iff \int ydy = \int e^x dx \quad \Rightarrow \quad \dfrac{y^2}{2} = e^x + c$;

Rješenja: $y^2 = 2e^x + c$.

☺ 681. $\begin{cases} y' = x(1+y^2) \\ y(0) = 1 \end{cases}$

iv) $\quad y' = x(1+y^2) \iff \dfrac{dy}{1+y^2} = xdx \iff \int \dfrac{dy}{1+y^2} = \int xdx \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arc\,tg} y = \dfrac{x^2}{2} + c$;

Opće rješenje: $y(x) = \operatorname{tg}(\dfrac{x^2}{2} + c)$;

v) $\quad y(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad y(0) = \operatorname{tg}(0 + c) = 1 \quad \Rightarrow \quad c = \dfrac{\pi}{4}$;

vi) $\quad$ Rješenje zadatka: $y = \operatorname{tg}(\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{\pi}{4})$.

☺ 682. $\begin{cases} yy' = x^2 \\ y(1) = 3 \end{cases}$

i) $\quad yy' = x^2 \iff ydy = x^2 dx \iff \int ydy = \int x^2 dx \quad \Rightarrow \quad \dfrac{y^2}{2} = \dfrac{x^3}{3} + c$;

Opće rješenje: $y(x)=\sqrt{\dfrac{2x^3}{3}+c}$;

ii) $y(1)=3 \quad \Rightarrow \quad y(1)=\sqrt{\dfrac{2}{3}+c}=3 \quad \Rightarrow \quad c=\dfrac{25}{3}$;

iii) Rješenje zadatka: $y=\sqrt{\dfrac{2x^3+25}{3}}$.

☺ 683. $\begin{cases} y^2y'=e^x \\ y(1)=4 \end{cases}$

i) $y^2y'=e^x \quad \Leftrightarrow \quad y^2dy=e^xdx \quad \Leftrightarrow \quad \int y^2dy=\int e^xdx \quad \Rightarrow \quad \dfrac{y^3}{3}=e^x+c$;

Opće rješenje: $y(x)=\sqrt[3]{3e^x+c}$;

ii) $y(1)=4 \quad \Rightarrow \quad y(1)=\sqrt[3]{3e+c}=4 \quad \Rightarrow \quad c=64-3e$;

iii) Rješenje zadatka: $y(x)=\sqrt[3]{3e^x+64-3e}$.

♠ZADACI ZA VJEŽBU♠

U slijedećim zadacima metodom separacije naći opća rješenja diferencijalnih jednadžbi.

684. $xydy=\sqrt{y^2+1}dx$.

685. $2x^2yy'+y^2=2$.

686. $y'-xy^2=2xy$.

687. $(1+x+y+xy)y'=1$.

688. $\dfrac{y'}{\sin 3x}-x^3e^{2y}=0$.

689. $\dfrac{(\sin y)y'}{x}=\dfrac{xe^x}{y}$.

U slijedećim zadacima metodom separacije naći partikularno rješenje diferencijalnih jednadžbi.

690. $\begin{cases} xyy'=1 \\ y(1)=5 \end{cases}$.

691. $\begin{cases} yy'=-x \\ y(1)=1 \end{cases}$.

692. $\begin{cases} e^xy'=y \\ y(0)=4 \end{cases}$.

693. $\begin{cases} xy'+\sin y=0 \\ y(1)=\pi \end{cases}$.

694. $\begin{cases} (x^2-1)y'+2xy^2=0 \\ \cancel{y(0)=1} \end{cases}$.

APPROVED

695. $\begin{cases} (\mathrm{ctg}\, x)y'+y=2 \\ y(0)=-1 \end{cases}$.

♠RJEŠENJA♠

684. $\ln x=c+\sqrt{y^2+1}$. **685.** $y^2-2=c\cdot e^{1/x}$.

686. $(c\cdot e^{-x^2}-1)y=2$ i $y=0$. **687.** $e^{(y+y^2/2)}=(1+x)c$.

688. $-\dfrac{e^{-2y}}{2}=\dfrac{2x\cos 3x}{9}-\dfrac{x^3\cos 3x}{3}-\dfrac{2\cancel{x}\sin 3x}{27}+\dfrac{x^2\sin 3x}{3}+c$. APPROVED

689. $-y\cos y+\sin y=(x^2-2x+2)e^x+c$. **690.** $y=\sqrt{\ln x^2+25}$. **691.** $y=\sqrt{2-x^2}$.

692. $y=4e^{(1-e^{-x})}$. **693.** $y=\pi$. **694.** $y(\ln(x^2-1)+c)=1$ i $y=0$. **695.** $y=2-3\cos x$.

9.3 LINEARNA DIFERENCIJALNA JEDNADŽBA

Linearne diferencijalne jednadžbe, za razliku od ostalih tipova diferencijalnih jednadžbi, imaju svojstvo univerzalnog rješenja. To znači da sve linearne diferencijalne jednadžbe imaju istu formu rješenja. O tome govori slijedeći rezultat.

♣Teorem 21. Neka je zadana linearna diferencijalna jednadžba u općenitom obliku:

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x),$$

gdje su $y=p(x)$ i $y=q(x)$ neprekidne funkcije, takozvani koeficijenti jednadžbe. Tada sva njena rješenja $y=y(x)$ imaju oblik:

$$y(x)=e^{-\int p(x)dx}\left[c+\int q(x)\,e^{\int p(x)dx}dx\right]. \clubsuit$$

♥Dokaz: dokaz je jednostavan, te istovremeno ilustrira postupak za rješavanje linearnih jednadžbi, koji sami možemo koristiti u zadacima. Ako je $y=y(x)$ neko rješenje linearne diferencijalne jednadžbe $y'+p(x)y=q(x)$, tada želimo pokazati da to rješenje mora imati oblik zadan u iskazu teorema. Prvo jednadžbu množimo sa multiplikatorom $e^{\int p(x)dx}$, pa sređujemo lijevu stranu i na kraju integriramo obadvije strane jednadžbe:

$$e^{\int p(x)dx}\frac{dy}{dx}+p(x)e^{\int p(x)dx}y=q(x)e^{\int p(x)dx} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\int p(x)dx}y\right)=q(x)e^{\int p(x)dx} \quad \Leftrightarrow \quad e^{\int p(x)dx}y=\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+c \quad \Rightarrow$$

$$y=e^{-\int p(x)dx}[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+c]. \quad \heartsuit$$

Naravno da je moguće koristiti ovu formulu za rješavanje linearnih diferencijalnih jednadžbi. Međutim, ako nismo dovoljno vični sa integralima, bilo bi bolje ponoviti postupak u dokazu ovog teorema. To ćemo pokazati na nekoliko riješenih primjera.

☺ 696. Riješimo diferencijalnu jednadžbu $y'+\frac{1}{x}y=e^{x^2}$, koristiće formulu za opće rješenje danu u teoremu 21:

i) $p(x)=\frac{1}{x}$, $q(x)=e^{x^2}$;

ii) $\int p(x)dx=\int\frac{1}{x}dx=\ln x$, $e^{\int p(x)dx}=e^{\ln x}=x$;

iii) $\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx=\int e^{x^2}xdx=\frac{1}{2}e^{x^2}$;

iv) $e^{-\int p(x)dx}=e^{-\ln x}=\frac{1}{x}$;

v) $y(x)=e^{-\int p(x)dx}[c+\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx]=\frac{1}{x}[c+\frac{1}{2}e^{x^2}]=\frac{1}{2x}e^{x^2}+\frac{c}{x}.$

☺ 697. Riješimo diferencijalnu jednadžbu $xy'+y=xe^{x^2}$, koristeći postupak za dokaz općeg rješenja koji je prezentiran u dokazu teorema 21. Prvo jednadžbu pišemo u obliku $y'+\frac{1}{x}y=e^{x^2}$, te sa njom radimo slijedeće korake:

i) množimo jednadžbu sa multiplikatorom $e^{\int p(x)dx}=e^{\ln x}=x$ pa dobivamo $xy'+y=xe^{x^2}$;

ii) sređivanje desne strane: $\frac{d}{dx}(xy)=xe^{x^2}$;

iii) integriranjem obadviju strana dobivamo:

$$xy=c+\int xe^{x^2}dx \;\Rightarrow\; y(x)=\frac{1}{x}[c+\frac{1}{2}e^{x^2}]=\frac{1}{2x}e^{x^2}+\frac{c}{x}.$$

Na svakom pojedinačno je da procjeni koja od ova dva načina će koristiti u rješavanju linearnih diferencijalnih jednadžbi.

☺ 698. Riješimo diferencijalnu jednadžbu $xy'+5y=x^3$, koristeći postupak za dokaz općeg rješenja koji je prezentiran u dokazu teorema 21. Prvo jednadžbu pišemo u obliku $y'+\frac{5}{x}y=x^2$ pa postupamo:

i) množimo jednadžbu sa multiplikatorom $e^{\int\frac{5}{x}dx}=e^{\ln x^5}=x^5$ pa dobivamo $x^5y'+5x^4y=x^7$;

ii) sređivanje desne strane: $\frac{d}{dx}(x^5y)=x^7$;

iii) integriranjem obadviju strana dobivamo:

$$x^5y=c+\int x^7dx \;\Rightarrow\; y(x)=\frac{1}{x^5}[c+\frac{1}{8}x^8]=\frac{1}{8}x^3+\frac{c}{x^5}.$$

☺ 699. Riješimo diferencijalnu jednadžbu $y'+2xy=3xe^{-x^2}$, koristeći postupak za dokaz općeg rješenja koji je prezentiran u dokazu teorema 21:

i) množimo jednadžbu sa multiplikatorom $e^{\int 2x dx} = e^{x^2}$ pa dobivamo $e^{x^2} y' + 2xe^{x^2} y = 3x$;

ii) sređivanje desne strane: $\frac{d}{dx}(e^{x^2} y) = 3x$;

iii) integriranjem obadviju strana dobivamo:

$$e^{x^2} y = c + 3\int x dx \quad \Rightarrow \quad y(x) = e^{-x^2}[c + \frac{3}{2}x^2] = \frac{3}{2}x^2 e^{-x^2} + ce^{-x^2}.$$

♠ZADACI ZA VJEŽBU♠

U slijedećim zadacima naći opće rješenje dane linearne diferencijalne jednadžbe.

700. $y' - xy = x$.
701. $xy' + y = x\ln x$.
702. $xy' + y = x\sin x^2$.
703. $x^2 y' + (1-2x)y = x^2$.
704. $y' - \frac{3}{x^2} y = \frac{1}{x^2}$.
705. $y' - \frac{2}{x} y = x\ln x$.
706. $y' + 4y = 2x + 3e^{3x}$.
707. $y' - 2y = xe^{3x}$.
708. $y' + y = \sin x$.
709. $y = x(y' - x\cos x)$.
710. $(xy' - 1)\ln x = 2y$.
711. $xy' + (x+1)y = 3x^2 e^{-x}$.

U slijedećim zadacima naći partikularno rješenje dane linearne diferencijalne jednadžbe. Pri tome kao i kod separacije varijable iz pethodne točke, prvo nađemo opće rješenje a potom uvrštavanjem početnog uvjeta izračunamo nepoznatu konstantu c.

712. $\begin{cases} y' + 4y = 2x + 3e^{3x} \\ y(0) = 5 \end{cases}$.
713. $\begin{cases} y' - 2y = xe^{3x} \\ y(3) = 1 \end{cases}$.
714. $\begin{cases} y' + 2xy = x^3 e^{-x^2} \\ y(0) = 4 \end{cases}$.
715. $\begin{cases} xy' + y = xe^{x^2} \\ y(1) = 2 \end{cases}$.
716. $\begin{cases} xy' + 5y = x^3 \\ y(1) = 1 \end{cases}$.
717. $\begin{cases} (1+x^2)y' + 9y = 0 \\ y(3) = 1 \end{cases}$.
718. $\begin{cases} x^3 y' + 3x^2 y = \sin x \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$.
719. $\begin{cases} xy' + 2y = \cos x \\ y(\pi/2) = 0 \end{cases}$.
720. $\begin{cases} xy' + y = x^4 + x^3 \\ y(1) = 1/2 \end{cases}$.
721. $\begin{cases} xy' + 2y = e^x \\ y(1) = 1 \end{cases}$.
722. $\begin{cases} x(2+x)y' + 2(1+x)y = 1 + 3x^2 \\ y(-1) = 1 \end{cases}$.
723. $\begin{cases} y'\cos x - y\sin x = x^3 e^{x^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

♠RJEŠENJA♠

700. $y=-1+c\cdot e^{x^2/2}$. **701.** $y=-\frac{x}{4}+\frac{c}{x}+\frac{1}{2}x\ln x$. **702.** $y=\frac{c}{x}-\frac{\cos x^2}{x}$. APPROVED

703. $y=x^2(1+c\cdot e^{1/x})$. **704.** $y=-\frac{1}{3}+c\cdot e^{-3/x}$. **705.** $y=cx^2+\frac{1}{2}x^2\ln^2 x$.

706. $y=\frac{x}{2}-\frac{1}{8}+\frac{3}{7}e^{3x}+c\cdot e^{-4x}$. **707.** $y=xe^{3x}-e^{3x}+c\cdot e^{2x}$.

708. $y=\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x+c\cdot e^{-x}$. **709.** $y=x(c+\sin x)$. **710.** $y=c\ln^2 x-\ln x$.

711. $xy=(x^3+c)e^{-x}$. **712.** $y=\frac{x}{2}-\frac{1}{8}+\frac{3}{7}e^{3x}+\frac{263}{56}e^{-4x}$.

713. $y=xe^{3x}-e^{3x}+(e^{-6}-2e^{3})e^{2x}$. **714.** $y=\frac{1}{4}x^4e^{-x^2}+4e^{-x^2}$. **715.** $y=\frac{e^{x^2}}{2x}+\frac{2}{x}-\frac{e}{2x}$.

716. $y=\frac{x^3}{8}+\frac{7}{8x^5}$. **717.** $y=e^{9arctg3-9arctgx}$. **718.** $y=-\frac{1}{x^3}+\frac{\cos x}{x^3}$. APPROVED

719. $y=\frac{\cos x}{x^2}+\frac{\sin x}{x}-\frac{\pi}{2x^2}$. **720.** $y=\frac{1}{20x}+\frac{x^3}{4}+\frac{x^4}{5}$. **722.** $y=\frac{1+x+x^3}{2x+x^2}$.

9.4 BERNOULLIJEVA DIFERENCIJALNA JEDNADŽBA

Bernoullijeva diferencijalna jednadžba ima oblik:

$$\boxed{\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)y^n.}$$

Ako je $n=0$ ili $n=1$, tada je ovo linearna jednadžba. Ako je pak $n\neq 0,1$ tada se supstitucijom $u=y^{1-n}$ Bernoullijeva jednadžba svodi na linearnu jednadžbu. Preciznije, ako pomnožimo Bernoullijevu jednadžbu sa y^{-n} tada dobivamo:

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+p(x)y^{1-n}=q(x) \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{1-n}\frac{d(y^{1-n})}{dx}+p(x)y^{1-n}=q(x).$$

Sada supstitucijom $u=y^{1-n}$ dobivamo da Bernoullijeva jednadžba prelazi u linearni oblik:

$$\frac{du}{dx}+(1-n)p(x)u=(1-n)q(x).$$

Sada ovu linearnu jednadžbu riješimo koristeći razmatranja iz prethodne točke, pa je traženo rješenje Bernoullijeve jednadžbe dano sa

$$y(x)=(u(x))^{1/(1-n)}.$$

Ovaj postupak ćemo ponovit na nekoliko riješenih primjera.

☹ 724. Riješiti diferencijalnu jednadžbu $\frac{dy}{dx} + y = xy^3$.

i) Množenjem jednadžbe sa y^{-3} dobivamo:

$$y^{-3}\frac{dy}{dx} + y^{-2} = x \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2}\frac{d(y^{-2})}{dx} + y^{-2} = x\,;$$

ii) Sada supstitucijom $u = y^{-2}$ prethodna jednadžba postaje linearna

$$\frac{du}{dx} - 2u = -2x\,;$$

iii) Ovu linearnu jednadžbu rješavamo primjenom postupka iz Teorema 24, pa dobivamo da je: $u(x) = x + \frac{1}{2} + ce^{2x}$;

iv) Na kraju traženo rješenje Bernoullijeve jednadžbe glasi:

$$y^2(x) = \frac{2}{2x + 1 + ce^{2x}}\,.$$

☹ 725. Riješiti diferencijalnu jednadžbu $x\frac{dy}{dx} + 2y = \frac{x}{y^3}$. Prvo je napišemo u obliku: $\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = \frac{1}{y^3}$. Potom radimo slijedeće korake.

i) Množenjem jednadžbe sa y^3 dobivamo:

$$y^3\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y^4 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{4}\frac{d(y^4)}{dx} + \frac{2}{x}y^4 = 1\,;$$

ii) Sada supstitucijom $u = y^4$ prethodna jednadžba postaje linearna

$$\frac{du}{dx} + \frac{8}{x}u = 4\,;$$

iii) Ovu linearnu jednadžbu rješavamo primjenom postupka iz Teorema 24, pa dobivamo da je: $u(x) = \frac{4}{9}x + \frac{c}{x^8}$;

iv) Na kraju traženo rješenje Bernoullijeve jednadžbe glasi:

$$y(x) = \pm\sqrt[4]{\frac{4x}{9} + \frac{c}{x^8}}\,.$$

♠ZADACI ZA VJEŽBU♠

U slijedećim zadacima naći opće riješenje zadane diferencijalne jednadžbe.

726. $y' + y = y^4 \sin x$.

727. $x^3 y' - 2xy = y^3$.

728. $xy' + 2y = e^x y^{-1}$.

729. $xy^2 y' - x^2 = y^3$.

730. $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = y^4 \cos x$.

731. $xy' + 2y + x^5 y^3 e^x = 0$.

U slijedećim zadacima naći partikularno riješenje zadane diferencijalne jednadžbe.

732. $\begin{cases} xy'+y=y^{-2} \\ y(1)=2 \end{cases}$.

733. $\begin{cases} 2y'-\dfrac{y}{x}+y^3\cos x=0 \\ y(2)=1 \end{cases}$.

734. $\begin{cases} y'+\dfrac{y}{x}=x^3y^3 \\ y(2)=1 \end{cases}$.

735. $\begin{cases} y'-\dfrac{x}{2}y=xy^5 \\ y(1)=1 \end{cases}$.

736. $\begin{cases} y'-2y\operatorname{tg}x+y^2\operatorname{tg}^4x=0 \\ y(0)=2 \end{cases}$.

737. $\begin{cases} y'+\dfrac{y}{4x}=-e^{\sqrt{x}}y^3 \\ y(1)=1 \end{cases}$.

♠RJEŠENJA♠

726. $y=(c\cdot e^{3x}+\frac{3}{10}\cos x+\frac{9}{10}\sin x)^{-1/3}$. **727.** $y^2=\dfrac{1}{-\frac{1}{8}-\frac{1}{2x}+c\cdot e^{4/x}}$.

728. $y^2=\frac{c}{x^4}+e^x(-\frac{12}{x^4}+\frac{12}{x^3}-\frac{6}{x^2}+\frac{2}{x})$. **729.** $y^3=cx^3-3x^2$.

731. $y^{-2}=x^4(2e^x+c)$ i $y=0$. **732.** $xy=\sqrt[3]{x^3+7}$. **734.** $y=\dfrac{2}{x\sqrt{17-4x^2}}$.

735. $y=(-2+3e^{1-x^2})^{-1/4}$. **737.** $y=\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}(1-4e+4e^{\sqrt{x}})^{1/2}}$.

9.5 EGZAKTNA DIFERENCIJALNA JEDNADŽBA

Diferencijalna jednadžba $f(x,y)dx+g(x,y)dy=0$ se zove egzaktna ukoliko postoji funkcija $u(x,y)$ takva da je:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f(x,y) \quad \text{i} \quad \frac{\partial u}{\partial y}=g(x,y),$$

odnosno ukoliko je $du=f(x,y)dx+g(x,y)$. Tada egzaktna jednadžba poprima oblik $du=0$ dok je opće rješenje dano formulom $u(x,y)=c$. Naravno pod uvjetom da smo pronašli iz prethodnih uvjeta funkciju $u(x,y)$. Primjetimo još da se svaka diferencijalna jednadžba prvog reda može napisati u obliku $f(x,y)dx+g(x,y)dy=0$.

Prije pronalaženja funkcije $u(x,y)$ bilo bi dobro provjeriti dali je dana jednadžba uopće egzaktna, jer ako nije nećemo moći ni naći takvu funkciju. Kriterij za utvrđivanje da li je neka diferencijalna jednadžba egzaktna je dan slijedećim rezultatom.

♣Teorem 22. Diferencijalna jednadžba $f(x,y)dx + g(x,y)dy = 0$ je egzaktna ako i samo ako vrijedi:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}. \ ♣$$

To znači da ćemo za danu jednadžbu prvo provjeriti dali je egzaktna, koristeći pri tome prethodni teorem, a tek potom ćemo tražiti funkciju $u(x,y)$. Postupak za pronalaženje funkcije $u(x,y)$ dajemo u nekoliko slijedećih primjera.

☺ 738. Nađimo opće rješenje diferencijalne jednadžbe $(2xy + y^2)dx + (x^2 + 2xy)dy = 0$. Radimo u nekoliko koraka:

i) $f(x,y) = 2xy + y^2$ i $g(x,y) = x^2 + 2xy$;

ii) računamo: $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x + 2y$ i $\frac{\partial g}{\partial x} = 2x + 2y$, odnosno $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$, pa po teoremu 22 zaključujemo da je $(2xy + y^2)dx + (x^2 + 2xy)dy = 0$ egzaktna diferencijalna jednadžba;

iii) po definiciji egzaktne jednadžbe, postoji funkcija $u(x,y)$ koja zadovoljava

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f(x,y) = 2xy + y^2 \quad \text{i} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = g(x,y) = x^2 + 2xy,$$

iz čega integriranjem slijedi:

$$u(x,y) = \int (2xy + y^2)dx = x^2y + xy^2 + c(y),$$

$$u(x,y) = \int (x^2 + 2xy)dy = x^2y + xy^2 + c(x)$$

odnosno $u(x,y) = x^2y + xy^2 + c$;

iv) S obzirom da je dana jednadžba egzaktna to opće rješenje $y(x)$ ima oblik:

$$u(x,y) = c \quad \Leftrightarrow \quad x^2y + xy^2 = c.$$

☺ 739. Nađimo opće rješenje diferencijalne jednadžbe $(2xy + e^y)dx + (x^2 + xe^y + 4y)dy = 0$. Radimo u nekoliko koraka:

i) $f(x,y) = 2xy + e^y$ i $g(x,y) = x^2 + xe^y + 4y$;

ii) računamo: $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x + e^y$ i $\frac{\partial g}{\partial x} = 2x + e^y$, odnosno $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$, pa po teoremu 22 zaključujemo da je $(2xy + e^y)dx + (x^2 + xe^y + 4y)dy = 0$ egzaktna diferencijalna jednadžba;

iii) po definiciji egzaktne jednadžbe, postoji funkcija $u(x,y)$ koja zadovoljava

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f(x,y) = 2xy + e^y \quad \text{i} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = g(x,y) = x^2 + xe^y + 4y\,,$$

iz čega integriranjem slijedi:

$$u(x,y) = \int (2xy + e^y)dx = x^2y + xe^y + c(y)\,,$$

$$u(x,y) = \int (x^2 + xe^y + 4y)dy = x^2y + xe^y + 2y^2$$

APPROVED

odnosno $\quad u(x,y) = x^2y + xe^y + 2y^2 + c\,;$

iv) S obzirom da je dana jednadžba egzaktna to opće rješenje $y(x)$ ima oblik:

$$u(x,y) = c \quad \Leftrightarrow \quad x^2y + xe^y + 2y^2 = c\,.$$

☹ 740. Nađimo partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe

$$-(2xy^2 + y\sin x)dx + (\cos x - 2x^2y)dy = 0 \;\text{ uz uvjet }\; y(0) = 1\,.$$

Radimo u nekoliko koraka:

i) $f(x,y) = -2xy^2 - y\sin x \quad \text{i} \quad g(x,y) = \cos x - 2x^2y\,;$

ii) računamo: $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -4xy - \sin x \quad \text{i} \quad \dfrac{\partial g}{\partial x} = -\sin x - 4xy$, odnosno $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial g}{\partial x}$, pa po teoremu 22 zaključujemo da je $-(2xy^2 + y\sin x)dx + (\cos x - 2x^2y)dy = 0$ egzaktna diferencijalna jednadžba;

iii) po definiciji egzaktne jednadžbe, postoji funkcija $u(x,y)$ koja zadovoljava

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f(x,y) = -2xy^2 - y\sin x \quad \text{i} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = g(x,y) = \cos x - 2x^2y\,,$$

iz čega integriranjem slijedi:

$$u(x,y) = -\int (2xy^2 + y\sin x)dx = -x^2y^2 + y\cos x + c(y)\,,$$

$$u(x,y) = \int (\cos x - 2x^2y)dy = y\cos x - x^2y^2 + c(x)\,,$$

odnosno $\quad u(x,y) = y\cos x - x^2y^2 + c\,;$

iv) S obzirom da je dana jednadžba egzaktna to opće rješenje $y(x)$ ima oblik:

$$u(x,y) = c \quad \Leftrightarrow \quad y\cos x - x^2y^2 = c\,.$$

v) Sada još trebamo odrediti konstantu c iz uvjeta $y(0) = 1$. Uvrštavanjem ovog uvjeta u opće rješenje slijedi: $1\cdot\cos 0 - 0^2 1^2 = c \quad \Rightarrow \quad c = 1$, pa je traženo rješenje zadatka funkcija:

$$y\cos x - x^2y^2 = 1\,.$$

♠ZADACI ZA VJEŽBU♠

Naći opće rješenje dane egzaktne diferencijalne jednadžbe.

741. $(3y+xy^2)dx+(3x+x^2y)dy=0$.

742. $(2y-e^y)dx+(2x-xe^y)dy=0$.

743. $(x+y)y'+y=0$.

744. $2xe^y dx+(x^2-y^2-2y)dy=0$. APPROVED

745. $e^{-y}dx-(2y+xe^{-y})dy=0$.

746. $ydx+(xy^3+x\ln x)dy=0$. APPROVED

747. $(1+y^2\sin 2x)dx-2y\cos^2 x dy=0$.

748. $3x^2(1+\ln y)dx-(2y-\dfrac{x^3}{y})dy=0$.

Naći partikularno rješenje.

749. $\begin{cases}(2y-x)y'+(2x-y)=0\\ y(2)=4\end{cases}$.

750. $\begin{cases}(2y+x+ye^y)dy+(e^x+y)=0\\ y(0)=1\end{cases}$. APPROVED

♠RJEŠENJA♠

741. $xy(6+xy)=c$. **742.** $x(2y-e^y)=c$. **743.** $xy+\dfrac{y^2}{2}=c$. **744.** $e^y(x^2-y^2)=c$.

745. $xe^{-y}-y^2=c$. **746.** $4y\ln x+y^4=c$. **747.** $x-y^2\cos^2 x=c$.

748. $x^3+x^3\ln y-y^2=c$. **749.** $x^2-xy+y^2=12$. **750.** $e^x+xy+y^2+(y-1)e^y=2$.

9.6 DIFERENCIJALNA JEDNADŽBA HOMOGENOG STUPNJA

Diferencijalna jednadžba $f(x,y)dx+g(x,y)dy=0$ je homogenog stupnja ukoliko se može svesti na oblik $\dfrac{dy}{dx}=h(\dfrac{y}{x})$. Na primjer, ukoliko su $f(x,y)$ i $g(x,y)$ polinomi homogenog stupnja odnosno ako postoji broj λ takav da vrijedi $f(tx,ty)=t^\lambda f(x,y)$ i $g(tx,ty)=t^\lambda g(x,y)$ tada se diferencijalna jednadžba $f(x,y)dx+g(x,y)dy=0$ može svesti na oblik $\dfrac{dy}{dx}=h(\dfrac{y}{x})$. Potom, uvodimo supstituciju $z=\dfrac{y}{x}$, te se početna jednadžba svodi na oblik rješiv metodom separacije varijabli. To ćemo pokazati na nekoliko riješenih primjera.

☺ 751. Riješiti diferencijalnu jednadžbu homogenog stupnja $-(x^2+5y^2)dx+xydy=0$. Nije teško primjetiti da su funkcije $f(x,y)=-(x^2+5y^2)$ i $g(x,y)=xy$ polinomi homogenog stupnja 2 odnosno $f(tx,ty)=t^2 f(x,y)$ i $g(tx,ty)=t^2 g(x,y)$. Stoga djeljenjem sa x^2 ćemo ovu jednadžbu svesti na oblik:

$$-1-5(\frac{y}{x})^2+\frac{y}{x}\frac{dy}{dx}=0 .$$

Supstitucijom $z=\frac{y}{x}$, gdje je $y'=xz'+z$ dobivamo:

$$-\frac{1}{z}-5z+xz'+z=0 \quad\Leftrightarrow\quad xz'=\frac{1}{z}+4z .$$

Ova se jednadžba rješava separacijom varijabli:

$$xz'=\frac{1}{z}+4z \quad\Leftrightarrow\quad \frac{zdz}{1+4z^2}=\frac{dx}{x} \quad\Leftrightarrow\quad \int\frac{zdz}{1+4z^2}=\int\frac{dx}{x} \quad\Rightarrow$$

$$\frac{1}{8}\ln(1+4z^2)=\ln x+c \quad\Rightarrow\quad z^2=\frac{cx^8-1}{4} \quad .$$

S obzirom da je $z=\frac{y}{x}$ odnosno $y=xz$ traženo rješenje jednadžbe $-(x^2+5y^2)dx+xydy=0$ je funkcija $y(x)=\pm x\sqrt{\frac{cx^8-1}{4}}$.

☺ 752. Riješiti diferencijalnu jednadžbu:

$$y'-\frac{y}{x}=e^{-\frac{y}{x}} .$$

Supstitucijom $z=\frac{y}{x}$, gdje je $y'=xz'+z$ lako dobivamo da je:

$$xz'+z-z=e^{-z} \quad\Leftrightarrow\quad xz'=e^{-z} .$$

Ova se jednadžba rješava separacijom varijabli:

$$xz'=e^{-z} \quad\Leftrightarrow\quad e^z dz=\frac{dx}{x} \quad\Leftrightarrow\quad \int e^z dz=\int\frac{dx}{x} \quad\Rightarrow$$

$$e^z=\ln x+c \quad\Rightarrow\quad z=\ln(\ln x+c) .$$

S obzirom da je $z=\frac{y}{x}$ odnosno $y=xz$ traženo rješenje jednadžbe $y'-\frac{y}{x}=e^{-\frac{y}{x}}$ je funkcija $y(x)=x\ln(\ln x+c)$.

♠ZADACI ZA VJEŽBU♠

U slijedećim zadacima naći opće rješenje diferencijalne jednadžbe.

753. $xy'=2x+y$.
754. $xyy'=x^2-3y^2$.
755. $4xy^3y'=4y^4+x^4$.
756. $4xy^3y'=6y^4+x^4$.
757. $(2x^2-y^2)y'-6yx=0$.
758. $xy'=x-y$.
759. $xy'-y=\sqrt{x^2+y^2}$.
760. $(x^2y^2-x^4)y'=x^2y^2-y^4$.
761. $y^2+x^2y'=xyy'$.
762. $(x^2+y^2)y'=2xy$.

763. $xy' - y = x \operatorname{tg} \dfrac{y}{x}$.

764. $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$.

U slijedećim zadacima naći partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe.

765. $\begin{cases} y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y} \\ y(4) = 0 \end{cases}$.

766. $\begin{cases} y' = \dfrac{y - \sqrt{x^2 + y^2}}{x} \\ y(1) = 0 \end{cases}$.

767. $\begin{cases} y' = \dfrac{xy - y^2}{x^2} \\ y(1) = 1 \end{cases}$.

768. $\begin{cases} y' = \dfrac{x + y}{x} \\ y(1) = 1 \end{cases}$.

769. $\begin{cases} y' = \dfrac{y + 2x}{2y - x} \\ y(1) = 1 \end{cases}$.

770. $\begin{cases} y' = \dfrac{y(y^2 + 3x^2)}{2x^3} \\ y(1) = 1 \end{cases}$.

♠RJEŠENJA♠

753. $y = 2x \ln x + cx$. **754.** $y^2 = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{c}{x^6}$. **755.** $y^4 = x^4(\log x + c)$. **756.** $x^4 + 2y^4 = cx^6$.

757. $y^2 = c(y^2 + 4x^2)^3$. **758.** $y = \dfrac{x}{2} + \dfrac{c}{x}$. **759.** $y = cx^2 + 1/c$. **760.** $y = \dfrac{x}{cx - 1}$.

761. $y = ce^{y/x}$. **762.** $y^2 - x^2 = cy$ i $y = 0$. **763.** $\sin \dfrac{y}{x} = cx$. **764.** $y = -x \ln \ln cx$.

765. $y^2 = 2x^2 \ln \dfrac{x}{4}$. **766.** $y = \dfrac{1 - x^2}{2}$. **767.** $y = \dfrac{x}{1 + \ln x}$. **768.** $y = x(1 + \ln x)$.

769. $y = \dfrac{1}{2}(x + \sqrt{5x^2 - 4})$. **770.** $y = \dfrac{x^{3/2}}{\sqrt{2 - x}}$.