AUDITORNE VJEŽBE — 9. TJEDAN

Linearan i vremenski nepromjenljiv sustav zadan je diferencijalnom jednadžbom

$$y''(t) + y'(t) - 6y(t) = u'(t) - 5u(t).$$

(a) Odredite homogeno rješenje jednadžbe.

(b) Odredite partikularno rješenje za pobudu $u(t) = (2t^2 - 1)\,\mu(t)$.

(c) Odredite partikularno rješenje za pobudu $u(t) = e^{3t}\mu(t)$.

(d) Koje je partikularno rješenje za pobudu $u(t) = 2\,(2t^2 - 1)\,\mu(t) - e^{3t}\mu(t)$? Zašto?

(e) Odredite odziv sustava na pobudu $u(t) = e^{3t}\mu(t)$ uz početne uvjete $y(0^-) = 1$ i $y'(0^-) = 2$. Istaknite prirodni i prisilni odziv.

(f) Odredite impulsni odziv uz iste početne uvjete.

(g) Odredite odziv mirnog sustava na pobudu $u(t) = e^{3t}\mu(t)$, te odziv nepobuđenog sustava uz iste početne uvjete.

Napredni zadatci:

(*h) Odredite sve pobude za koje će partikularno rješenje biti 0.

(*i) Odredite partikularno rješenje za pobudu $u(t) = e^{2t}\mu(t)$.

(*j) Odredite impulsni odziv mirnog sustava zadanog diferencijalnom jednadžbom

$$y''(t) + y'(t) - 6y(t) = u''(t) - 5u(t).$$

Rješenja

(a) Karakteristični polinom je $r^2 + r - 6$. Homogeno rješenje je $y_h(t) = \left(C_1 e^{2t} + C_2 e^{-3t}\right)\mu(t)$.

(b) Pretpostavljeni oblik partikularnog rješenja je $y_p(t) = \left(at^2 + bt + c\right)\mu(t)$, gdje su a, b i c konstante koje je potrebno odrediti. Uvrstimo $y_p(t)$, $y_p'(t)$, $y_p''(t)$, $u(t)$ i $u'(t)$ u jednadžbu, izjednačimo koeficijente uz t^2, t i 1, te dobivamo $y_p(t) = \left(\frac{5}{3}t^2 - \frac{1}{9}t - \frac{8}{27}\right)\mu(t)$.

(c) Pretpostavljeni oblik partikularnog rješenja je $y_p(t) = ae^{3t}\mu(t)$, gdje je a konstanta koju je potrebno odrediti. Uvrstimo $y_p(t)$, $y_p'(t)$, $y_p''(t)$, $u(t)$ i $u'(t)$ u jednadžbu, izjednačimo koeficijente uz e^{3t}, te dobivamo $y_p(t) = \left(-\frac{1}{3}e^{3t}\right)\mu(t)$.

(d) Sustav je linearan, stoga je partikularno rješenje $y_p(t) = \left(2\left(\frac{5}{3}t^2 - \frac{1}{9}t - \frac{8}{27}\right) - \left(-\frac{1}{3}e^{3t}\right)\right)\mu(t)$.

(e) Pobuda nije glatka već sadrži konačan skok u nuli ($u(0^-) = 0$, $u(0^+) = 1$), stoga će početni uvjeti $y(0^+)$, $y'(0^+)$ biti različiti od uvjeta $y(0^-)$, $y'(0^-)$. Uzastopnim integriranjem obiju strana jednadžbe u granicama od 0^- do t te postavljanjem $t = 0^+$ (vidi predavanje 16., slajdovi 23–27), dobivamo sustav jednadžbi:

$(y'(0^+) - y'(0^-)) + (y(0^+) - y(0^-)) = u(0^+) - u(0^-) \quad \Rightarrow \quad y'(0^+) + y(0^+) = 4$

$(y(0^+) - y(0^-)) = 0 \quad \Rightarrow \quad y(0^+) = 1,\ y'(0^+) = 3$ (*vidi formule, zadnja str., 1. dio*)

Totalni odziv čini zbroj homogenog i partikularnog rješenja gdje su konstante C_1 i C_2 namještene tako da odziv zadovoljava početne uvjete. Izračunamo $y(t) = y_h(t) + y_p(t) = \left(-\frac{1}{3}e^{3t} + C_1 e^{2t} + C_2 e^{-3t}\right)\mu(t)$, te $y'(t) = \left(-e^{3t} + 2C_1 e^{2t} - 3C_2 e^{-3t}\right)\mu(t) + \delta(t)$, te zatim njih izračunamo u trenutku $t = 0^+$: $y(0^+) = -\frac{1}{3} + C_1 + C_2 = 1$, $y'(0^+) = -1 + 2C_1 - 3C_2 = 3$, iz čega izračunamo $C_1 = \frac{8}{5}$, $C_2 = -\frac{4}{15}$. Totalni odziv je $y(t) = \left(-\frac{1}{3}e^{3t} + \frac{8}{5}e^{2t} - \frac{4}{15}e^{-3t}\right)\mu(t)$, od čega $\left(\frac{8}{5}e^{2t} - \frac{4}{15}e^{-3t}\right)\mu(t)$ čini prirodni, a $-\frac{1}{3}e^{3t}\mu(t)$ prisilni odziv.

(f) Određujemo ponovo početne uvjete u 0^+, ali za pobudu $u(t) = \delta(t)$. Pobuda sadrži Diracovu distribuciju, stoga je $\int_{0^-}^{0^+} u(t) \neq 0$.

$(y'(0^+) - y'(0^-)) + (y(0^+) - y(0^-)) = -5 \quad \Rightarrow \quad y'(0^+) + y(0^+) = -2$

$(y(0^+) - y(0^-)) = 1 \quad \Rightarrow \quad y(0^+) = 2,\ y'(0^+) = -4$ (*vidi formule, zadnja str., 2. dio*)

$C_1 = \cancel{\frac{1}{5}}\,\frac{2}{5}$, $C_2 = \cancel{\frac{17}{15}}\,\frac{8}{5}$

Totalni odziv je $y(t) = \left(\frac{2}{5}e^{2t} + \frac{8}{5}e^{-3t}\right)\mu(t)$. Prisilni odziv je 0 zato što je najveći stupanj derivacije pobude (1) manji od najvećeg stupnja derivacije odziva (2).

(g) Odziv mirnog sustava dobiva se uz početne uvjete $y(0^-) = 0$, $y'(0^-) = 0$ i pobudu $u(t) = e^{3t}\mu(t)$. Odziv sadrži homogeno $y_h(t) = \left(C_1 e^{2t} + C_2 e^{-3t}\right)\mu(t)$ i partikularno rješenje $y_p(t) = -\frac{1}{3}e^{3t}\mu(t)$. Izračunamo početne uvjete $y(0^+) = 0$, $y'(0^+) = 1$, te odredimo konstante $C_1 = \frac{3}{5}$, $C_2 = -\frac{4}{15}$. Odziv mirnog sustava je $y(t) = \left(-\frac{1}{3}e^{3t} + \frac{3}{5}e^{2t} - \frac{4}{15}e^{-3t}\right)\mu(t)$.

Odziv nepobuđenog sustava dobiva se uz početne uvjete $y(0^-) = 1$, $y'(0^-) = 2$, i pobudu $u(t) = 0$. Odziv sadrži samo homogeno rješenje $y_h(t) = \left(C_1 e^{2t} + C_2 e^{-3t}\right)\mu(t)$, jer je partikularno rješenje za pobudu $u(t) = 0$ također nula. Konstante iznose $C_1 = 1$, $C_2 = 0$. Odziv nepobuđenog sustava je $y(t) = e^{2t}\mu(t)$.

(*h) $u(t) = Ce^{5t}$, uvrstimo li pobudu u zadanu jednadžbu primijetit ćemo da se desna strana krati i ostaje samo 0. Iako se pobuda krati, ona utječe na promjenu početnih uvjeta u $t = 0^+$.

(*i) Pobuda je posebna po tome što je ona dio homogenog rješenja. Uvrstimo li u jednadžbu rješenje oblika $ae^{2t}\mu(t)$, primijetit ćemo da se lijeva strana krati i ostaje samo 0. Partikularno rješenje u ovom slučaju ima oblik $y_p(t) = ate^{2t}\mu(t)$. Kao i ranije, uvrstimo $y_p(t)$, $y_p'(t)$, $y_p''(t)$, $u(t)$ i $u'(t)$ u jednadžbu, izjednačimo koeficijente uz e^{2t}, te dobivamo $y_p(t) = -\frac{3}{5}te^{2t}\mu(t)$.

(*j) Najveći stupanj derivacije pobude (2) jednak je najvećem stupnju derivacije odziva (2). Pobuda također sadrži Diracovu distribuciju, $\delta(t)$. Integriramo li triput uzastopno obje strane diferencijalne jednadžbe u granicama od 0^- do t, te postavimo $t = 0^+$, dobit ćemo $\int_{0^-}^{0^+} y(\tau)\, d\tau = \int_{0^-}^{0^+} \delta(\tau)\, d\tau = 1$, što znači da i odziv $y(t)$ sadrži beskonačan skok u nuli. Zato će partikularno rješenje biti $y_p(t) = \delta(t)$. Sustav je miran pa su početni uvjeti $y(0^-)$ i $y'(0^-)$ jednaki nula. Računamo početne uvjete $y(0^+)$, $y'(0^+)$:

$(y'(0^+) - y'(0^-)) + (y(0^+) - y(0^-)) - 6 = -5 \quad \Rightarrow \quad y'(0^+) + y(0^+) = 1$

$(y(0^+) - y(0^-)) = -1 \quad \Rightarrow \quad y(0^+) = -1, y'(0^-) = 2$ (*vidi formule, zadnja str., 2. dio*)

$C_1 = -\frac{1}{5}, C_2 = -\frac{4}{5}$

Impulsni odziv je $y(t) = \left(-\frac{1}{5}e^{2t} - \frac{4}{5}e^{-3t}\right)\mu(t) + \delta(t)$.