Signali i sustavi - Zadaci za vježbu s rješenjima

III. tjedan

1. Izračunajte energiju sljedećih kontinuiranih signala:
   a. $x(t) = e^{-at}\mu(t),\ a > 0$,
   b. $x(t) = t\mu(t)$.

Rješenje:

Energija kontinuiranih signala računa se prema formuli $E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$.

a. Uvrštavanjem u formulu imamo $E = \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-at}\mu(t)|^2 dt$, a>0. Kada neki signal množimo s jediničnom stepenicom, signal se mijenja tako da prije nule ima vrijednost nula, dok od nule na dalje ima svoju pravu vrijednost. Integral za signal koji je nula je isto tako nula, pa se integral za energiju može pojednostaviti:

$$E = \int_0^{\infty} |e^{-at}|^2 dt = \int_0^{\infty} e^{-2at} dt = \left.\frac{e^{-2at}}{-2a}\right|_0^{\infty} = \frac{1}{2a}$$

b. I u ovom primjeru je slično kao i u a. zadatku. Prema definiciji

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |t\mu(t)|^2 dt = \int_0^{\infty} t^2 dt = \left.\frac{t^3}{3}\right|_0^{\infty} = \infty$$

2. Nađite energiju sljedećih diskretnih signala:
    a. $x[n] = (-0.5)^n \mu[n]$,
    b. $x[n] = n(\mu[n] - \mu[n-5])$.

<u>Rješenje:</u>

Energija diskretnih signala računa se prema formuli $E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2, n \epsilon \mathbb{Z}$.

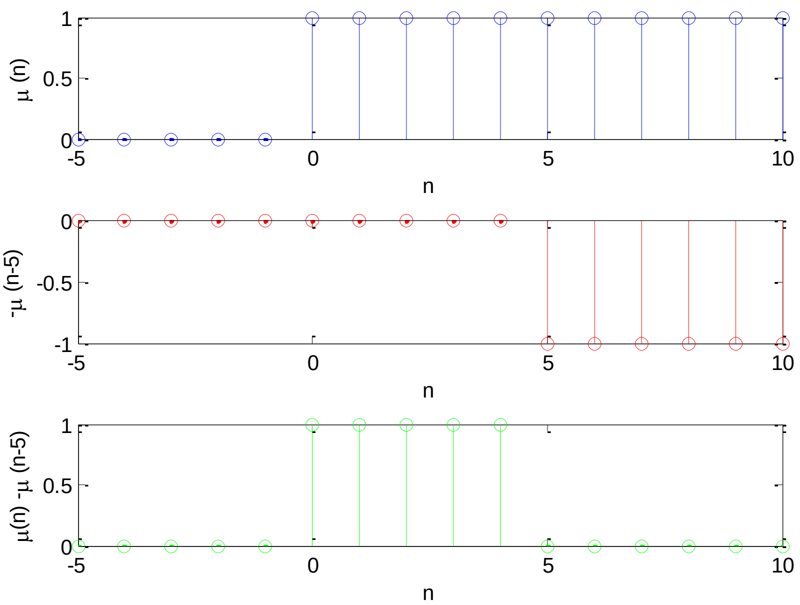
a. Uvrštavanjem u formulu imamo $E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |(-0.5)^n \mu[n]|^2$. Kada neki signal množimo s jediničnom stepenicom, signal se mijenja tako da prije nule ima vrijednost nula, dok od nule na dalje ima svoju pravu vrijednost. Suma za signal koji je nula je isto tako nula, pa se suma za energiju može pojednostaviti:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |(-0.5)^n \mu[n]|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (-0.5)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} 0.25^n$$

Ovako dobiveni red je geometrijski sa beskonačno članova. Njegova suma računa se prema $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$. Tražena energija je $E = \sum_{n=0}^{\infty} 0.25^n = \frac{1}{1-0.25} = \frac{4}{3}$.

b. Prije računanja energije promotrimo kako izgleda razlika jediničnih stepenica. Iz slike je vidljivo da je razlika ove dvije stepenice uvijek nula osim za n=0, 1, 2, 3 i 4. Pa se energija traži prema

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n(\mu[n] - \mu[n-5]|^2 = \sum_{n=0}^{4} n^2 = 0 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$$



3. Zadan je diskretan signal $x[n] = n(\mu[n] - \mu[n-2008])$. Izračunajte energiju signala.

Rješenje:

Energija diskretnog signala definirana je na sljedeći način:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 , n\epsilon\mathbb{Z}$$

U našem slučaju

$$E = \sum_{n=0}^{2007} n^2 = 2696779140$$

Pri tome smo koristili sljedeću relaciju

$$\sum_{n=0}^{k} n^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Napomena: još neke česte formule za konačne sume možete naći u službenom šalabahteru.

4. Izračunajte srednju snagu kontinuiranog signala

$$x(t) = e^{j2\pi t} \sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right).$$

Rješenje:

Srednja snaga kontinuiranih signala računa se prema formuli:

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$$

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left| e^{j2\pi t} \sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right)\right|^2 dt =$$

$$\left|e^{j2\pi t}\right| = \left|\cos 2\pi t + j\sin 2\pi t\right| =$$

$$= \sqrt{\cos^2 2\pi t + \sin^2 2\pi t} = 1$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sin^2\left(t + \frac{\pi}{3}\right) dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{1 - \cos 2\left(t + \frac{\pi}{3}\right)}{2} dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left[\int_{-T/2}^{T/2} \frac{1}{2} dt - \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{T/2} \cos 2\left(t + \frac{\pi}{3}\right) dt \right] =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left[\frac{T}{2} + \frac{1}{4} \sin T \right] = \frac{1}{2}$$

5. Nađite srednje snage diskretnih signala:
   a. $x[n] = \mu[n]$,
   b. $x[n] = 2e^{j3n}$.

<u>Rješenje:</u>

Srednja snaga diskretnih signala računa se prema formuli:

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x(n)|^2 \,, n\epsilon\mathbb{Z}$$

a. Uvrštavanjem u formulu imamo

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |\mu(n)|^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^{N} 1 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} (N+1) = \frac{1}{2}$$

b. Zadani signal je kompleksni pa na njega utječe apsolutna vrijednost

$$|x(n)| = \left|2e^{j3n}\right| = 2|\cos 3n + j \sin 3n| = 2\sqrt{\cos^2 3n + \sin^2 3n} = 2$$

Snaga je sada

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} 2^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} (2N+1) \cdot 2^2 = 4$$

6. Izračunajte kut između svih signala $f_k(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)$, za $k \in \mathbb{Z}$, definiranih na domeni $[0, T]$.

Rješenje:

Kut između signala $f(t)$ i $g(t)$ iz prostora L_2 definiran je kao $\cos\varphi = \frac{\langle f(t), g(t)\rangle}{\|f(t)\|_2 \|g(t)\|_2}$.

Izračunajmo prvo L_2 normu signala $f_k(t)$:

$$\|f_k(t)\|_2 = \sqrt{\langle f_k(t), f_k(t)\rangle} = \sqrt{\left\langle \cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right), \cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)\right\rangle} = \sqrt{\int_0^T \cos^2\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)dt}$$

$$= \sqrt{\frac{T}{2} + \frac{T\sin(4\pi k)}{8\pi k}} = \sqrt{\frac{T}{2}}, \text{ za } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$

$$\|f_0(t)\|_2 = \sqrt{\left\langle \cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot 0\cdot t\right), \cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot 0\cdot t\right)\right\rangle} = \sqrt{\int_0^T 1^2 dt} = \sqrt{T}, \text{ za } k = 0.$$

Računamo skalarni produkt između svih parova signala $\langle f_m(t), f_n(t)\rangle$ za $m, n \in \mathbb{Z}$:

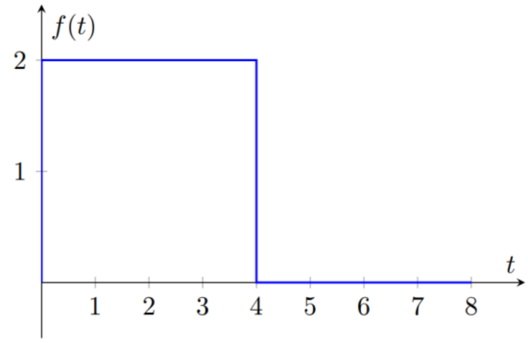
$$\langle f_m(t), f_n(t)\rangle = \left\langle \cos\left(\frac{2\pi}{T}mt\right), \cos\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)\right\rangle =$$

$$\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi}{T}mt\right)\cos\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)dt = \int_0^T \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{T}(m-n)t\right)dt + \int_0^T \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{T}(m+n)t\right)dt =$$

$$\frac{1}{2}\frac{T\sin(2\pi(m-n))}{2\pi(m-n)} + \frac{1}{2}\frac{T\sin(2\pi(m+n))}{2\pi(m+n)} = 0, \text{ za svaki } m \neq n.$$

Kut $\cos\varphi = 0$ pa kažemo da su takvi signali međusobno ortogonalni ili okomiti.

7. Odredite najbolju aproksimaciju signala $f(t)\colon [0,8] \to \mathbb{R}$ zadanog slikom, pomoću signala $\hat{f}_k(t)$ koji je linearna kombinacija osnovnih signala $\psi_0(t) = a,\ t \in [0,8]$, gdje je $a > 0$ konstanta, i $\psi_k(t) = \sin\left(\frac{\pi}{4}kt\right)$, za $t \in [0,8]$ i $k \in \mathbb{Z} \setminus \{\,0\,\}$. Odredite vrijednost konstante a tako da svi osnovni signali $\psi_k(t)$ imaju jednaku energiju. Odredite koeficijente razlaganja F_k za $k = -1, 0, 1$. Osnovni signali su međusobno ortogonalni.



Rješenje:

Najbolja aproksimacija $\hat{f}_K(t)$ određuje se pomoću ortogonalne projekcije signala $f(t)$ na osnovne signale $\psi_k(t)$ kao

$$\hat{f}_K(t) = \sum_{k=-K}^{K} \frac{\langle f(t), \psi_k(t)\rangle}{\|\psi_k(t)\|_2^2}\, \psi_k(t),$$

uz pretpostavku da su osnovni signali međusobno ortogonalni i jednakih energija. Kako bi izračunali koeficijente razlaganja F_k, najprije moramo izračunati L_2 normu, odnosno kvadrat norme, osnovnih signala $\psi_k(t) = \sin\left(\frac{\pi}{4}kt\right)$.

$\|\psi_k(t)\|_2^2 = \sqrt{\langle \psi_k(t), \psi_k(t)\rangle}^2 = \int_0^8 \sin^2\left(\frac{\pi}{4}kt\right) dt = 4 - \frac{1}{2}\frac{\sin(4\pi k)}{\frac{\pi}{2}k} = 4, \quad$ za $k \in \mathbb{Z} \setminus \{\,0\,\}$

Kako bi svi osnovni signali imali jednaku energiju, mora vrijediti $\|\psi_0(t)\|_2^2 = 4$. Odredimo vrijednost konstante a:

$\|\psi_0(t)\|_2^2 = \sqrt{\langle \psi_0(t), \psi_0(t)\rangle}^2 = \int_0^8 a^2 dt = 8a^2$, slijedi $8a^2 = 4 \to a = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Koeficijenti razlaganja definirani su kao: $F_k = \frac{\langle f(t), \psi_k(t)\rangle}{\|\psi_k(t)\|_2^2}$. Izračunajmo prvo koeficijent F_0:

$F_0 = \frac{1}{4}\langle f(t), \psi_0(t)\rangle = \frac{1}{4}\int_0^8 f(t) a\, dt = \frac{1}{4}\int_0^4 2\frac{1}{\sqrt{2}} dt = \sqrt{2}$.

Koeficijenti F_k jednaki su:

$F_k = \frac{1}{4}\langle f(t), \psi_k(t)\rangle = \frac{1}{4}\int_0^8 f(t) \sin\left(\frac{\pi}{4}kt\right) dt = \frac{1}{4}\int_0^4 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}kt\right) dt = 2\frac{1-\cos(\pi k)}{\pi k}$, za $k \neq 0$.

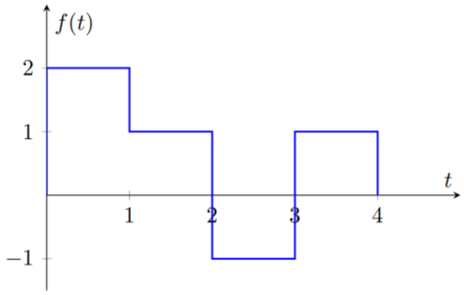
Koeficijenti F_k za $k = -1, 0, 1$ su:

$F_{-1} = \frac{-4}{\pi}$, $F_0 = \sqrt{2}$, $F_1 = \frac{4}{\pi}$.

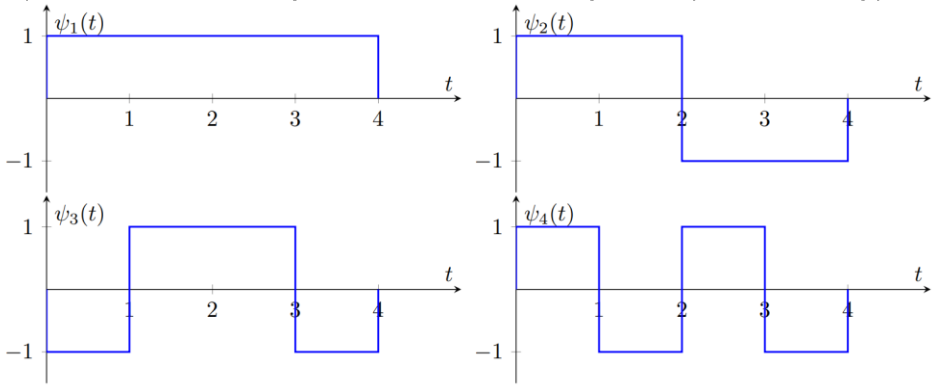
Najbolja aproksimacija $\hat{f}_K(t)$ signala $f(t)$ za $K = 1$ se može zapisati kao:

$$\hat{f}_K(t) = \sum_{k=-K}^{K} F_k\, \psi_k(t) = 1 + \frac{8}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right).$$

8. Zadan je kontinuirani signal $f(t)\colon [0,4] \to \mathbb{R}$ na slici.



Rastavite zadani signal po osnovnim signalima $\psi_1(t), \psi_2(t), \psi_3(t), \psi_4(t)$ prikazanim na slici ispod. Zadani osnovni signali su međusobno ortogonalni i jednakih energija.



Rješenje:

Prvo izračunajmo L_2 normu, odnosno kvadrat norme, osnovnih signala $\psi_k(t)$. U zadatku je napomenuto da su osnovni signali jednakih energija pa je dovoljno izračunati kvadrat norme jednog osnovnog signala.

Kvadrat norme osnovnog signala $\psi_1(t)$ je:

$$\|\psi_1(t)\|_2^2 = \sqrt{\langle \psi_1(t), \psi_1(t) \rangle}^2 = \int_0^4 1^2 dt = 4.$$

Koeficijenti razlaganja definirani su kao: $F_k = \frac{\langle f(t), \psi_k(t) \rangle}{\|\psi_k(t)\|_2^2}$.

Izračunajmo koeficijente razlganja:

$$F_1 = \frac{1}{4}\int_0^4 f(t)\,\psi_1^*(t)dt = \frac{1}{4}\left[\int_0^1 2 \cdot 1dt + \int_1^2 1 \cdot 1dt + \int_2^3 -1 \cdot 1dt + \int_3^4 1 \cdot 1dt\right]$$
$$= \frac{1}{4}(2+1-1+1) = \frac{3}{4},$$
$$F_2 = \frac{1}{4}\int_0^4 f(t)\,\psi_2^*(t)dt = \frac{1}{4}(2+1+1-1) = \frac{3}{4},$$
$$F_3 = \frac{1}{4}\int_0^4 f(t)\,\psi_3^*(t)dt = \frac{1}{4}(-2+1-1-1) = \frac{-3}{4},$$
$$F_4 = \frac{1}{4}\int_0^4 f(t)\,\psi_4^*(t)dt = \frac{1}{4}(2-1-1-1) = \frac{-1}{4}.$$

Provjerite vrijedi li $\hat{f}(t) \triangleq \sum_{k=1}^{4} F_k \psi_k(t) = f(t)$.

9. Zadan je diskretan signal $x[n] = \{\underline{2}, -2, 0, 1\}$, $x \in \ell_2[0,3]$. Rastavite zadani signal po osnovnim signalima zadanim sa

$\psi_1[n] = \frac{1}{2} \times \{\underline{1}, 1, 1, 1\}$, $\psi_1 \in \ell_2[0,3]$,

$\psi_2[n] = \frac{1}{2} \times \{\underline{1}, 1, -1, -1\}$, $\psi_2 \in \ell_2[0,3]$,

$\psi_3[n] = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \{\underline{1}, -1, 0, 0\}$, $\psi_3 \in \ell_2[0,3]$,

$\psi_4[n] = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \{\underline{0}, 0, 1, -1\}$, $\psi_4 \in \ell_2[0,3]$.

Zadani osnovni signali su međusobno ortogonalni i jednakih energija.

Rješenje:

Izračunajmo ℓ_2 normu, odnosno kvadrat norme, diskretnih osnovnih signala $\psi_\mathrm{k}[n]$:

$$\|\psi_1[n]\|_2^2 = \sqrt{\langle\psi_1[n], \psi_1[n]\rangle}^2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{3} \psi_1[n]\psi_1^*[n]}^2 = \sum_{n=0}^{3} \psi_1^2[n] = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1.$$

Koeficijenti razlaganja definirani su kao: $F_k = \frac{\langle x[n], \psi_k[n]\rangle}{\|\psi_k[n]\|_2^2}$.

Koeficijenti su redom:

$F_1 = \sum_{n=0}^{3} x[n]\psi_1^*[n] = 1 - 1 + 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$,

$F_2 = \sum_{n=0}^{3} x[n]\psi_2^*[n] = 1 - 1 + 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$,

$F_3 = \sum_{n=0}^{3} x[n]\psi_3^*[n] = \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} + 0 + 0 = 2\sqrt{2}$,

$F_4 = \sum_{n=0}^{3} x[n]\psi_4^*[n] = 0 + 0 + 0 - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Provjerite vrijedi li $\hat{x}[n] \triangleq \sum_{k=1}^{4} F_k\psi_k[n] = x[n]$.