Opis dinamičkih sustava

Modeliranje i simuliranje sustava

prof. dr. sc. Željko Ban

e-mail: *zeljko.ban@fer.hr*

Matematički opis dinamičkih sustava

- Kontinuirani sustavi
  - diferencijalne jednadžbe (linearne s konstantnim i varijablilnim koeficijentima, nelinearne)
  - prijenosne funkcije (linearni ili linearizirani dijelovi sustava u donjem Laplaceovom području)
  - frekvencijske karakteristike
  - jednadžbe varijabli stanja u matričnom obliku
    - Direktni oblik (standardni)
      - Direktna upravljiva forma (*controlable canonical form*) (matrica b=1
      - Direktni osmotrivi oblik (*observable canonical form*) c=1
    - Iterativni oblik
    - Paralelni oblik (Normalni oblik)

- Diskretni sustavi
  - jednadžbe diferencija
  - jednadžbe diskretnih varijabli stanja u matričnom obliku
  - prijenosne funkcije u Z području
  - rekurzivne jednadžbe

Grafički prikaz dinamičkih sustava

- Blokovske sheme
- Graf toka signala
- Vezni dijagrami (*Bond graf*)

Matematički opis kontinuiranih linearnih sustava

Diferencijalna jednadžba

$$\underbrace{a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 y^{//} + a_1 y^{/} + a_0 y}_{\textbf{Izlazna varijabla}} = b_0 u$$

ulazna varijabla

- koeficijenti diferencijalne jednadžbe realne konstante
- specijalni slučaj - pobudna funkcija ne sadrži derivacije ulazne varijable
- opisuje linearni kontinuirani sustav čija prijenosna funkcija ne sadrži nule

Matematički opis kontinuiranih linearnih sustava

Prijenosna funkcija

- Definicija:
  - **Prijenosna funkcija** je omjer izlazne i ulazne varijable u donjem Laplaceovom području uz početne uvjete jednake nuli.

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_2 y^{//} + a_1 y^{/} + a_0 y = b_0 u$$

Prijelaz u donje Laplaceovo područje

$$a_n s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \ldots + a_2 s^2 Y(s) + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) = b_0 U(s)$$

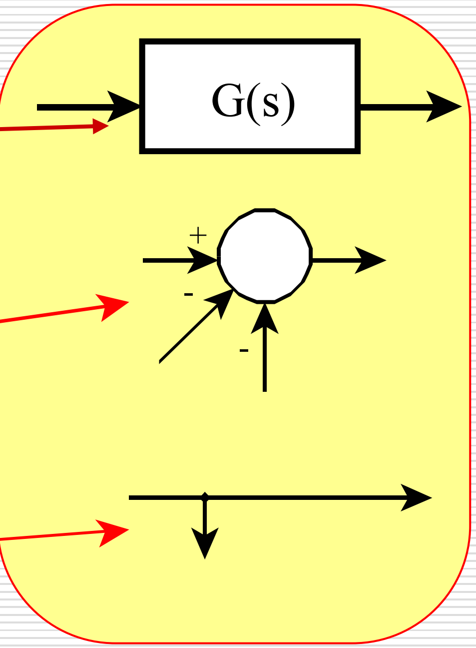
Prijenosna funkcija

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

Matematički opis kontinuiranih linearnih sustava

Blokovska shema

- Elementi blokovske sheme
  - blokovi
    - izlazna varijabla određena djelovanjem funkcije bloka na ulaznu varijablu
    - izlazna varijabla bloka ne djeluje na ulaznu varijablu
  - sumacijska mjesta
  - signali
    - (vektori kod kojih strelica određuje smjer signala)
  - točke grananja



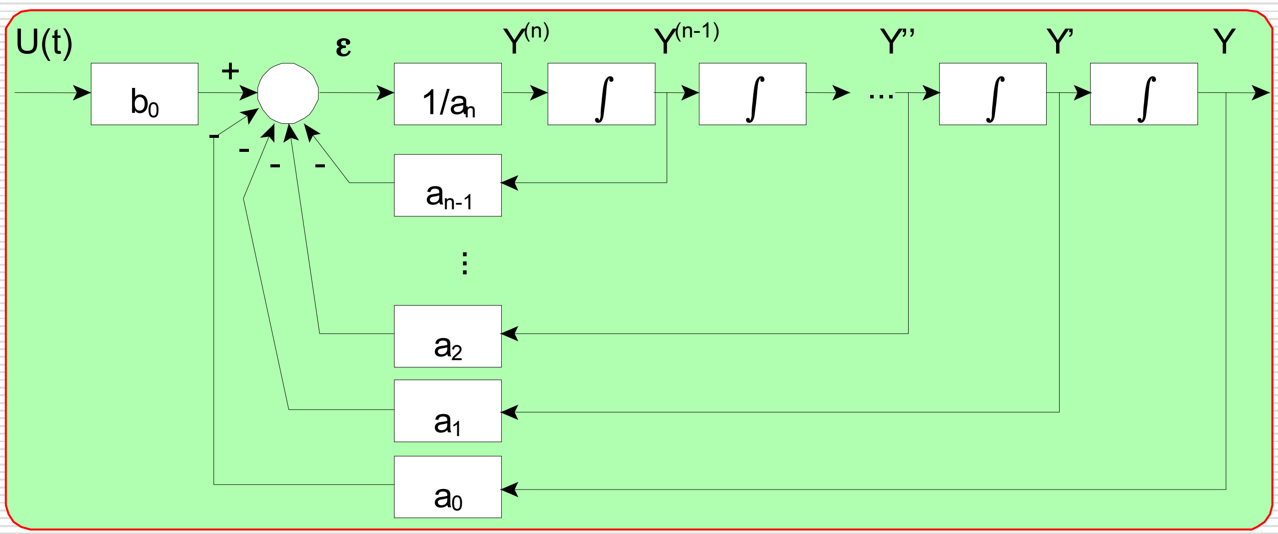
- Karakteristike blokovske sheme
  - jasno prikazuje tok signala
  - tokovi energije nisu jasno vidljivi

Matematički opis kontinuiranih linearnih sustava

Blokovska shema

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b_0 u$$

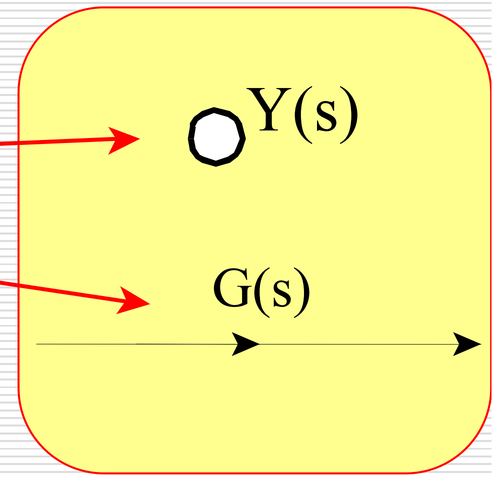
$$y^{(n)} = \frac{1}{a_n}\left[b_0 u - \left(a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y \right)\right]$$



Matematički opis kontinuiranih linearnih sustava

Graf toka signala

- **Elementi grafa toka signala**
  - varijable predstavljene čvorovima
  - funkcije predstavljene usmjerenim linijama (signalima)
  - više signala na jednoj varijabli se sumira

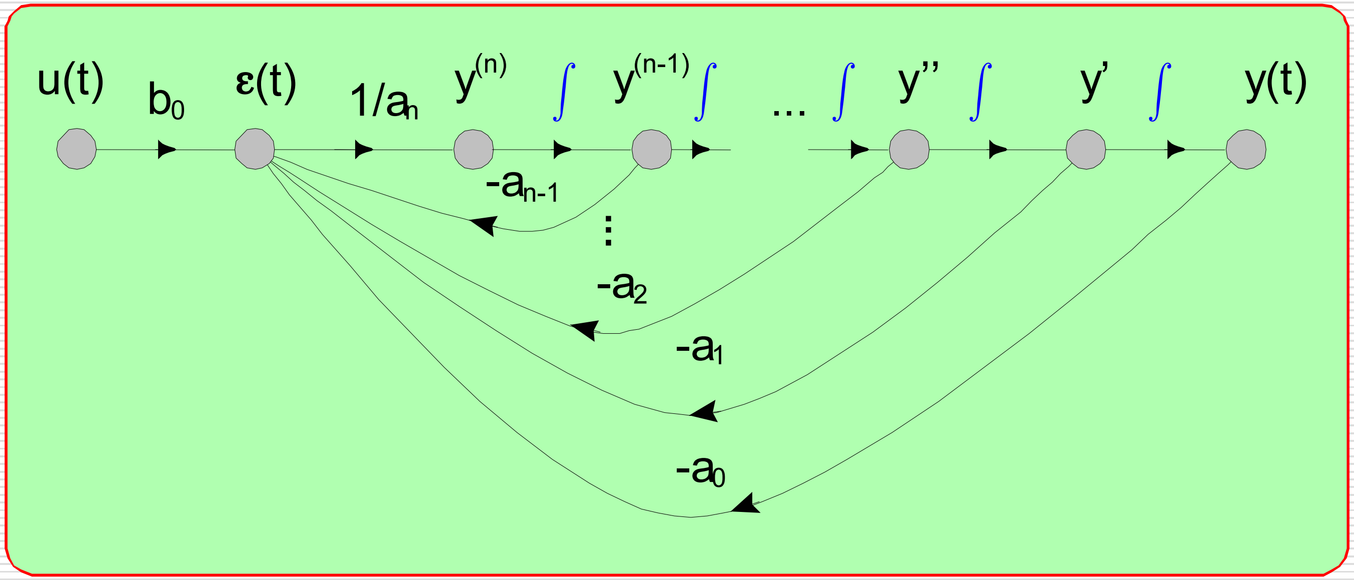


- **Karakteristike grafa toka signala**
  - prikaz signala u modelu
  - vidljive varijable
  - topološka struktura slična blokovskoj shemi
  - tokovi energije nisu vidljivi

Matematički opis kontinuiranih linearnih sustava

Graf toka signala

$$y^{(n)} = \frac{1}{a_n}\left[b_0 u - (a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y)\right]$$



Matematički opis kontinuiranih linearnih sustava

Prijenosna funkcija kontinuiranog linearnog sustava koja sadrži nule

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_2 y^{//} + a_1 y^{/} + a_0 y =$$
$$= b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \ldots + b_2 u^{//} + b_1 u^{/} + b_0 u$$

Prijenosna funkcija

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

Kod realnih kauzalnih sustava n>m

$$a_n s^n y(s) + a_{n-1} s^{n-1} y(s) + \ldots + a_2 s^2 y(s) + a_1 s y(s) + a_0 y(s) =$$
$$= b_m s^m u(s) + b_{m-1} s^{m-1} u(s) + \ldots + b_2 s^2 u(s) + b_1 s u(s) + b_0 u(s)$$

Matematički opis kontinuiranih linearnih sustava

Prijenosna funkcija kontinuiranog linearnog sustava koja sadrži nule

Prijenosna funkcija

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

Kod realnih kauzalnih sustava n>m

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{X(s)}{U(s)} \cdot \frac{Y(s)}{X(s)} = G_1(s) \cdot G_2(s)$$

$$G_1(s) = \frac{X(s)}{U(s)}; \qquad G_2(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

$$G_1(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

$$G_2(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0$$

Matematički opis kontinuiranih linearnih sustava

Prijenosna funkcija kontinuiranog linearnog sustava koja sadrži nule

$$G_1(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

$$G_2(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0$$

$$x^{(n)}(t) = \frac{1}{a_n}\left[u(t) - a_{n-1}x^{(n-1)} - \cdots - a_m x^{(m)} - a_{m-1}x^{(m-1)} - \cdots - a_2 x'' - a_1 x' - a_0 x\right]$$

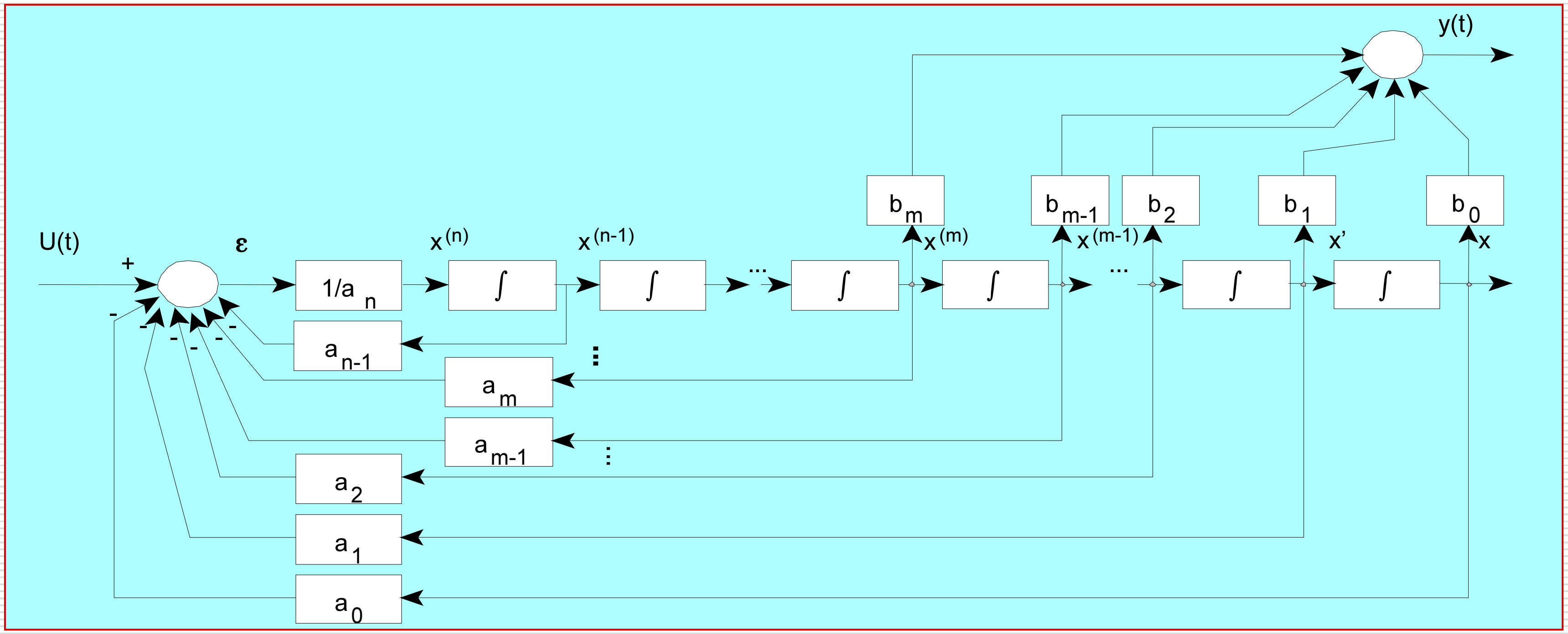
$$y(t) = b_m x^{(m)} + b_{m-1}x^{(m-1)} + \cdots + b_2 x'' + b_1 x' + b_0 x$$

Matematički opis kontinuiranih linearnih sustava

Blokovska shema sustava s nulama prijenosne funkcije

$$x^{(n)}(t) = \frac{1}{a_n}\left[u(t) - a_{n-1}x^{(n-1)} - \cdots - a_m x^{(m)} - a_{m-1}x^{(m-1)} - \cdots - a_2 x'' - a_1 x' - a_0 x\right]$$

$$y(t) = b_m x^{(m)} + b_{m-1}x^{(m-1)} + \cdots + b_2 x'' + b_1 x' + b_0 x$$

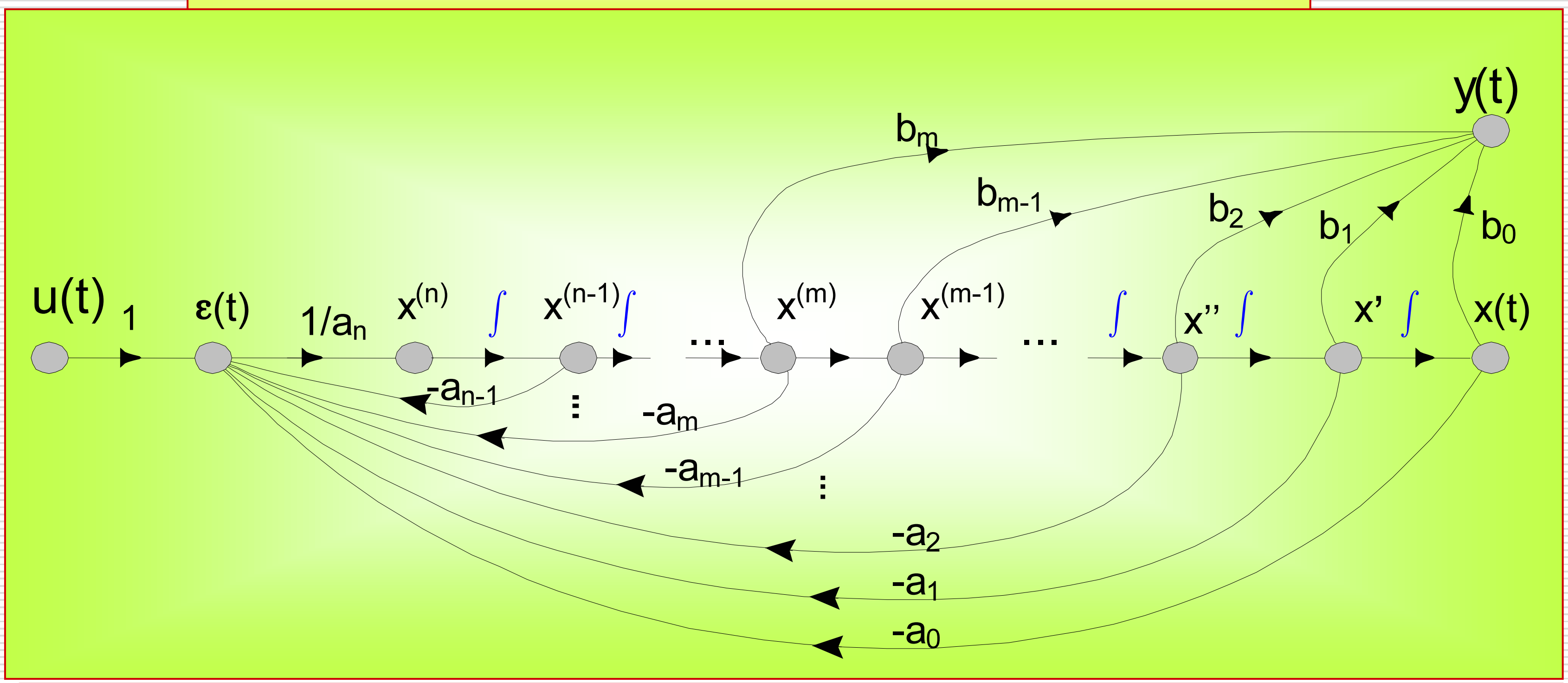


Matematički opis kontinuiranih linearnih sustava

Graf toka signala sustava s nulama prijenosne funkcije

$$x^{(n)}(t)=\frac{1}{a_n}\left[u(t)-a_{n-1}x^{(n-1)}-\cdots-a_m x^{(m)}-a_{m-1}x^{(m-1)}-\cdots-a_2x''-a_1x'-a_0x\right]$$

$$y(t)=b_m x^{(m)}+b_{m-1}x^{(m-1)}+\cdots+b_2x''+b_1x'+b_0x$$



Određivanje stacionarnih stanja iz prijenosne funkcije

- Stacionarno stanje
  - Iznos varijable sustava kad vrijeme teži beskonačnosti
  - Računanje pomoću teorema o konačnoj vrijednosti
- Početno stanje
  - Iznos varijable u trenutku t=0
  - Računanje pomoću teorema o početnoj vrijednosti

Teorem o konačnoj vrijednosti

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s)$$

$$y_s = \lim_{t \to \infty}\left(y(t)\right) = \lim_{s \to 0}\left(s \cdot Y(s)\right) = \lim_{s \to 0}\left(s \cdot G(s) \cdot U(s)\right)$$

Teorem o početnoj vrijednosti

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s)$$

$$y_0 = \lim_{t \to 0}\left(y(t)\right) = \lim_{s \to \infty}\left(s \cdot Y(s)\right) = \lim_{s \to \infty}\left(s \cdot G(s) \cdot U(s)\right)$$

Frekvencijska karakteristika kontinuiranih linearnih sustava

- Frekvencijska karakteristika je omjer spektra izlazne veličine i spektra ulazne veličine

$$G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)}$$

$$G(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = Re(G(j\omega)) + jIm(G(j\omega))$$

$$L(\omega) = 20\log A(\omega)$$

Nelinearni kontinuirani sustavi s jednim ulazom i izlazom

- Opisuju se nelinearnim diferencijalnim jednadžbama i grafički prikazuju nelinearnim blokovskim shemama (i nelinearnim bond grafovima)

Nelinearna diferencijalna jednadžba implicitnog tipa

$$f(y^{(n)}(t), y^{(n-1)}(t), \ldots, y''(t), y'(t), y(t),\ u^{(m)}(t), u^{(m-1)}(t), \ldots, u''(t), u'(t), u(t), t) = 0$$

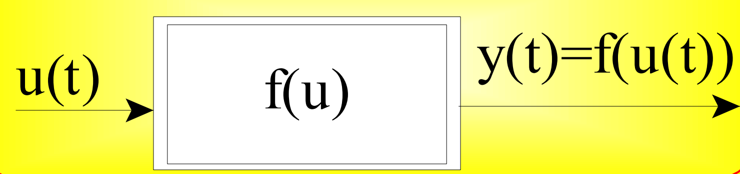
Nelinearna diferencijalna jednadžba eksplicitnog tipa

$$y^{(n)}(t) = f(y^{(n-1)}(t), \ldots, y''(t), y'(t), y(t),\ u^{(m)}(t), u^{(m-1)}(t), \ldots, u''(t), u'(t), u(t), t)$$

Prijenosnim funkcijama opisuju se samo linearizirani dijelovi sustava

Za prikaz nelinearnog kontinuiranog sustava potrebno je najvišu derivaciju izlazne varijable izraziti eksplicitno pomoću ostalih varijabli i njihovih derivacija.

Nelinearni blok



Prikaz kontinuiranih sustava u prostoru stanja

- Karakteristike prostora stanja
  - prikaz sustava n-tog reda pomoću n diferencijalnih jednadžbi 1. reda
  - linearni vremenski nepromjenjivi sustavi
    - linearne diferencijalne jednadžbe s konstantnim koeficijentima
    - prikaz u matričnom obliku
    - prikaz sustava s više ulaza i izlaza
  - nelinearni sustavi
    - nelinearne diferencijalne jednadžbe 1. reda

Prikaz linearnih kontinuiranih sustava u prostoru stanja

- Linearne diferencijalne jednadžbe s konstantnim koeficijentima

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_1 u_1 \\
\dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + b_2 u_1 \\
&\ldots \\
\dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + b_n u_1 \\
y &= c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n + d_1 u_1
\end{aligned}
$$

Matrični prikaz

$$
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}x_n \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ddots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} u_1
$$

$$
y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \ldots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + d_1 u_1
$$

Prikaz linearnih kontinuiranih sustava u prostoru stanja

- Određivanje opisa sustava u prostoru stanja iz:
  - blokovske sheme
    - izlaz svakog integratora je varijabla stanja
  - iz diferencijalne jednadžbe ili prijenosne funkcije direktnom metodom
    - za sustave s jednim ulazom i jednim izlazom
  - iz diferencijalne jednadžbe i prijenosnih funkcija sustava s više ulaza i izlaza
    - direktna metoda uz transformaciju kanonički osmotrivi oblik
    - matrica c ima jedinicu u prvom stupcu (ostalo su nule)
    - matrica b ima elemente različite od nule

Prikaz linearnih kontinuiranih sustava u prostoru stanja

- sustav s više ulaza i izlaza

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} x_n \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2p} \\ & & \ddots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ & & \ddots & \\ c_{r1} & c_{r2} & \ldots & c_{rn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \ldots & d_1p \\ d_{21} & d_{22} & \ldots & d_2p \\ & & \ddots & \\ d_{r1} & d_{r2} & \ldots & d_{rp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix}$$

Matrični prikaz:

$$\underline{\dot{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u}$$
$$\underline{y} = \underline{C}\,\underline{x} + \underline{D}\,\underline{u}$$

- $\underline{x}$ - vektor varijabli stanja,
- $\underline{y}$ - vektor izlaznih varijabli,
- $\underline{u}$ - vektor ulaznih varijabli,
- $\underline{A}$ - matrica sustava,
- $\underline{B}$ - ulazna matrica,
- $\underline{C}$ - izlazna matrica,
- $\underline{D}$ - matrica direktnog preslikavanja ulaza na izlaz

Prikaz nelinearnih kontinuiranih sustava u prostoru stanja

- sustav s više ulaza i izlaza

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_p) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_p) \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_p) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_p) \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_p) \\ \dots \\ g_r(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_p) \end{bmatrix}$$

Matrični prikaz:

- vektor derivacija varijabli stanja određen je vektorom algebarskih funkcija više varijabli
- varijable funkcija:
  - varijable stanja
  - ulazne varijable

Prikaz kontinuiranih sustava vektorskom blokovskom shemom

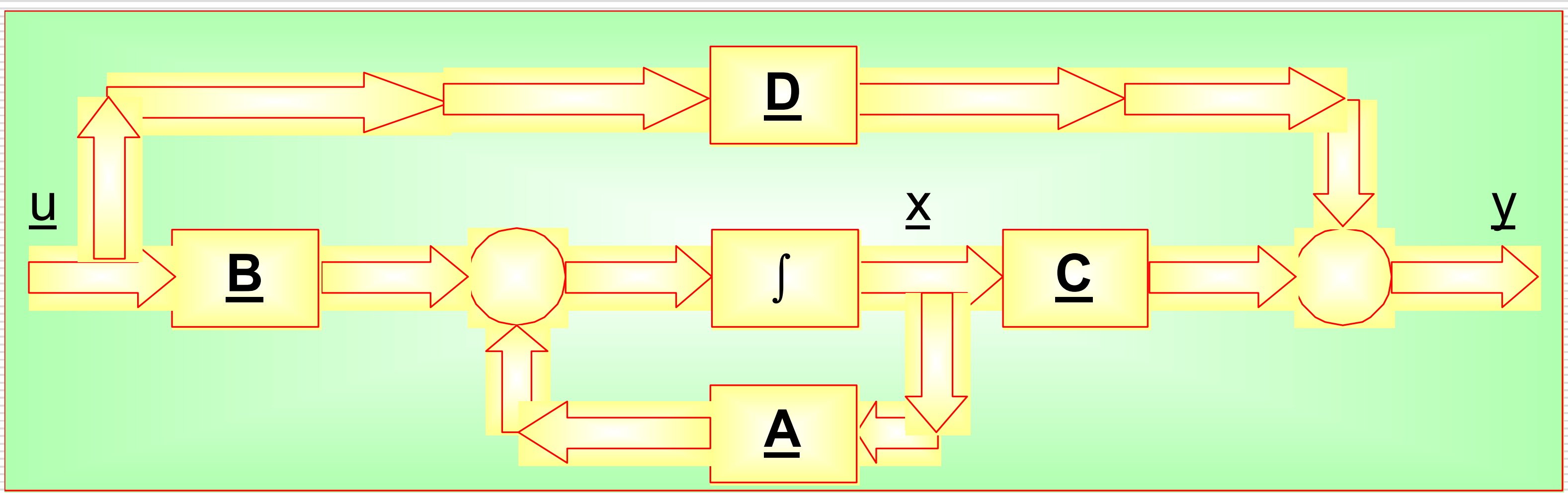
Matrični prikaz:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{B}\underline{u}$$

$$\underline{y} = \underline{C}\underline{x} + \underline{D}\underline{u}$$

- $\underline{x}$ - vektor varijabli stanja,
- $\underline{y}$ - vektor izlaznih varijabli,
- $\underline{u}$ - vektor ulaznih varijabli,

- $\underline{A}$ - matrica sustava,
- $\underline{B}$ - ulazna matrica,
- $\underline{C}$ - izlazna matrica,
- $\underline{D}$ - matrica direktnog preslikavanja ulaza na izlaz



Linearni kontinuirani sustavi s jednim ulazom i jednim izlazom

određivanje opisa varijablama stanja iz diferencijalne jednadžbe u standardnom obliku – direktnom metodom

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b_0 u$$

$$y^{(n)} = \frac{1}{a_n}\left[-a_{n-1} y^{(n-1)} - \dots - a_2 y'' - a_1 y' - a_0 y + b_0 u\right]$$

Prijenosna funkcija

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

$$\begin{aligned}
x_1 &= y, \\
\dot{x}_1 &= x_2 = \dot{y}, \\
\dot{x}_2 &= x_3 = \ddot{y}, \\
&\dots \\
\dot{x}_{n-1} &= x_n = y^{(n-1)}, \\
\dot{x}_n &= y^{(n)} = \frac{1}{a_n}\left[-a_{n-1} y^{(n-1)} - \dots - a_2 y'' - a_1 y' - a_0 y + b_0 u\right] \\
\dot{x}_n &= y^{(n)} = \frac{1}{a_n}\left[-a_{n-1} x_n - \dots - a_2 x_3 - a_1 x_2 - a_0 x_1 + b_0 u\right]
\end{aligned}$$

Linearni kontinuirani sustavi s jednim ulazom i jednim izlazom

određivanje opisa varijablama stanja iz diferencijalne jednadžbe u standardnom obliku – direktnom metodom

$$
\begin{aligned}
x_1 &= y,\\
\dot{x}_1 &= x_2 = \dot{y},\\
\dot{x}_2 &= x_3 = \ddot{y},\\
&\dots\\
\dot{x}_{n-1} &= x_n = y^{(n-1)},\\
\dot{x}_n &= y^{(n)} = \frac{1}{a_n}\left[-a_{n-1}y^{(n-1)} - \dots - a_2 y'' - a_1 y' - a_0 y + b_0 u\right]\\
\dot{x}_n &= y^{(n)} = \frac{1}{a_n}\left[-a_{n-1}x_n - \dots - a_2 x_3 - a_1 x_2 - a_0 x_1 + b_0 u\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\
 & & & \ddots & \\
0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\
-\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & \dots & -\frac{a_{n-1}}{a_n}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{b_0}{a_n} \end{bmatrix} u
$$

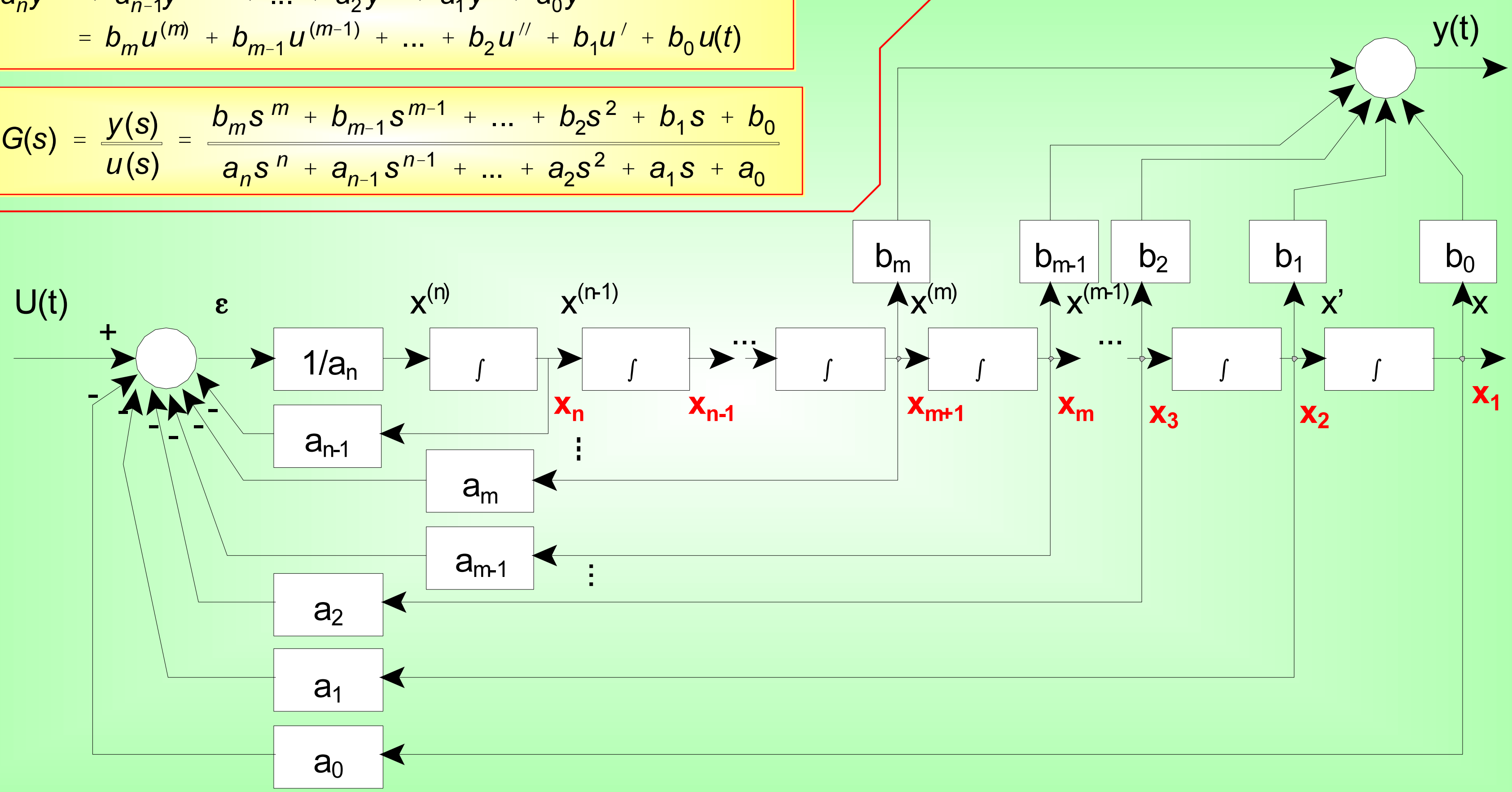
$$
y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}
$$

Linearni kontinuirani sustavi s jednim ulazom i jednim izlazom

- sustav koji sadrži polove i nule *(red brojnika prijenosne funkcije niži od reda nazivnika)*
- određivanje opisa varijablama stanja direktnom metodom

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = $$
$$= b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \dots + b_2 u'' + b_1 u' + b_0 u(t)$$

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

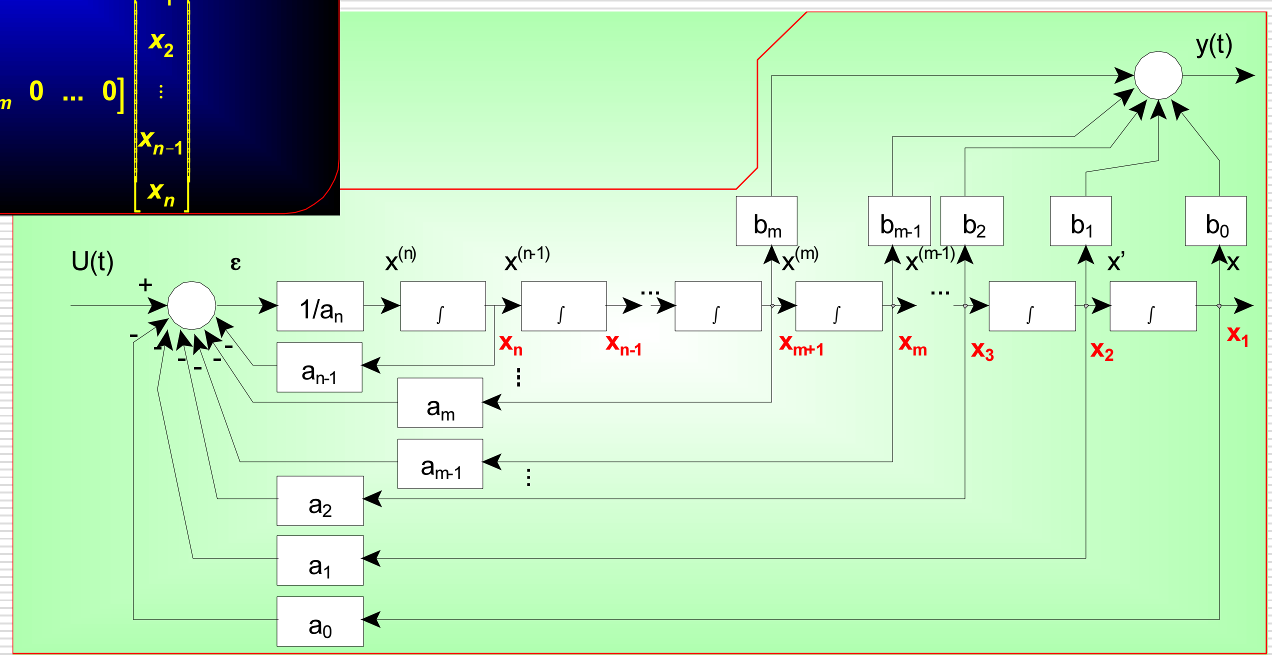


Linearni kontinuirani sustavi s jednim ulazom i jednim izlazom

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \vdots\\ \dot{x}_{n-1}\\ \dot{x}_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & \dots & -\frac{a_{n-1}}{a_n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_{n-1}\\ x_n\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ \frac{1}{a_n}\end{bmatrix}u$$

$$y = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \dots b_{m-1} & b_m & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_{n-1}\\ x_n\end{bmatrix}$$

- sustav koji sadrži polove i nule *(red brojnika prijenosne funkcije niži od reda nazivnika)*
- varijable stanja su izlazi iz integratora na blokovskoj shemi



Linearni kontinuirani sustavi s jednim ulazom i jednim izlazom

- sustav s istim redom brojnika i nazivnika prijenosne funkcije
- prijenosna funkcija s jediničnim koeficijentom nazivnika uz najvišu potenciju varijable s

Opća prijenosna funkcija

$$Y(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0} U(s)$$

Rastavljanje na dvije prijenosne funkcije

$$Z(s) = \frac{1}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0} U(s)$$

$$Y(s) = (b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \ldots + b_1 s + b_0) Z(s)$$

Linearni kontinuirani sustavi s jednim ulazom i jednim izlazom

- sustav s istim redom brojnika i nazivnika prijenosne funkcije

$$Z(s) = \frac{1}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0} U(s)$$

$$z^{(n)} = -a_0 z - a_1 \dot{z} - \ldots - a_{n-1} z^{(n-1)} + u$$

$$\begin{aligned}
x_1 &= z \\
\dot{x}_1 &= x_2 = \dot{z} \\
\dot{x}_2 &= x_3 = \ddot{z} \\
&\vdots \\
\dot{x}_{n-1} &= x_n = z^{(n-1)} \\
\dot{x}_n &= z^{(n)} = -a_0 z - a_1 \dot{z} - \ldots - a_{n-1} z^{(n-1)} + u
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Linearni kontinuirani sustavi s jednim ulazom i jednim izlazom

- sustav s istim redom brojnika i nazivnika prijenosne funkcije
- izlazna jednadžba

$$Y(s) = (b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \ldots + b_1 s + b_0) Z(s)$$
$$z = x_1$$

$$y = \begin{bmatrix} b_0 - b_n a_0 & b_1 - b_n a_1 & b_2 - b_n a_2 & \ldots & b_{n-1} - b_n a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_n u$$

$$\begin{aligned} y &= b_n z^{(n)} + b_{n-1} z^{(n-1)} + \ldots + b_1 \dot{z} + b_0 z = \\ &= b_n \dot{x}_n + b_{n-1} x_n + \ldots + b_1 x_2 + b_0 x_1 = \\ &= b_n(-a_{n-1} x_n - a_{n-2} x_{n-1} - \ldots - a_1 x_2 - a_0 x_1 + u) + \\ &+ b_{n-1} x_n + \ldots + b_1 x_2 + b_0 x_1 = \\ &= (b_{n-1} - b_n a_{n-1}) x_n + (b_{n-2} - b_n a_{n-2}) x_{n-1} + \ldots + (b_1 - b_n a_1) x_2 + \\ &+ (b_0 - b_n a_0) x_1 + b_n u \end{aligned}$$

Linearni kontinuirani sustavi s jednim ulazom i jednim izlazom

- sustav s istim redom brojnika i nazivnika prijenosne funkcije
- prikaz u prostoru stanja – direktni oblik

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} b_0 - b_n a_0 & b_1 - b_n a_1 & b_2 - b_n a_2 & \dots & b_{n-1} - b_n a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_n u$$

Linearni kontinuirani sustavi s jednim ulazom i jednim izlazom

- sustav s istim redom brojnika i nazivnika prijenosne funkcije
- jednostavniji način prikaza sustava u prostoru stanja direktnom metodom

Opća prijenosna funkcija

$$Y(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0} U(s)$$

- izlučuje se koeficijent b_n kao sumand
- prijenosna funkcija poprima oblik

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = b_n + \frac{(b_{n-1} - b_n a_{n-1}) s^{n-1} + (b_{n-2} - b_n a_{n-2}) s^{n-2} + \cdots + (b_1 - b_n a_1) s + (b_0 - b_n a_0)}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

- koeficijent b_n daje direktan odnos ulaza i izlaza
- koeficijent b_n postaje matrica d
- ostatak prijenosne funkcije ima red brojnika niži od reda nazivnika, pa se pretvara u prostor stanja na standardan način

Linearni kontinuirani sustavi s jednim ulazom i jednim izlazom

- Prijelaz iz opisa varijablama stanja u opis prijenosnom funkcijom

Varijable stanja:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{B}u$$
$$y = \underline{C}\underline{x} + \underline{D}u$$

- prijelaz u donje laplaceovo područje

$$s\underline{X} = \underline{A}\underline{X} + \underline{B}\underline{U}$$
$$\underline{y} = \underline{C}\underline{X} + \underline{D}\underline{U}$$

$$(s\underline{I} - \underline{A})\underline{X} = \underline{B}\underline{U}$$
$$\underline{y} = \underline{C}\underline{X} + \underline{D}\underline{U}$$

- izražavanje varijabli x i y pomoću ulazne varijable u

$$\underline{x} = (s\underline{I} - \underline{A})^{-1}\underline{B}\underline{U}(s)$$
$$\underline{Y} = \left[\underline{C}(s\underline{I} - \underline{A})^{-1}\underline{B} + \underline{D}\right]\underline{U}(s)$$

Prijenosna matrica:

$$\underline{G}(s) = \left[\underline{C}(s\underline{I} - \underline{A})^{-1}\underline{B} + \underline{D}\right]$$

- za sustav s jednim ulazom i jednim izlazom
  - prijenosna matrica degenerira u prijenosnu funkciju

Linearni kontinuirani sustavi s jednim ulazom i jednim izlazom

- Prikaz sustava u formi s jedinicom u matrici $\underline{C}$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \vdots\\ \dot{x}_{n-1}\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&0&\cdots&0&0\\0&0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&0&1&\cdots&0&0\\ \vdots&&&&\ddots&&\vdots\\0&0&0&0&\cdots&0&1\\-a_0&-a_1&-a_2&-a_3&\cdots&-a_{n-2}&-a_{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\ \vdots\\x_{n-1}\\x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\0\\ \vdots\\0\\1\end{bmatrix}u$$

Početni oblik

$$y=\begin{bmatrix}b_0-b_na_0 & b_1-b_na_1 & b_2-b_na_2 & \ldots & b_{n-1}-b_na_{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\ \vdots\\x_n\end{bmatrix}+b_nu$$

Veza: ista prijenosna funkcija

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\left[\underline{C}\left(s\underline{I}-\underline{A}\right)^{-1}\underline{B}+\underline{D}\right]$$

$$Y(s)=\frac{b_ns^n+b_{n-1}s^{n-1}+\ldots+b_1s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1s+a_0}U(s)$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \vdots\\ \dot{x}_{n-1}\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&0&\cdots&0&0\\0&0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&0&1&\cdots&0&0\\ \vdots&&&&\ddots&&\vdots\\0&0&0&0&\cdots&0&1\\-a_0&-a_1&-a_2&-a_3&\cdots&-a_{n-2}&-a_{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\ \vdots\\x_{n-1}\\x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\\ \vdots\\ \beta_{n-1}\\ \beta_n\end{bmatrix}u$$

Željeni oblik

$$y=\begin{bmatrix}1&0&0&\ldots&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\ \vdots\\x_n\end{bmatrix}+\beta_0u$$

Linearni kontinuirani sustavi s jednim ulazom i jednim izlazom

- Prikaz sustava u formi s jedinicom u matrici <u>C</u>

- Koeficijenti nazivnika prijenosnih funkcija su isti
- Izjednačavanjem koeficijenata brojnika prijenosne funkcije uz iste potencije varijable *s* dobije se sustav jednadžbi

$$
\begin{aligned}
b_n &= \beta_0 \\
b_{n-1} &= \beta_0 a_{n-1} + \beta_1 \\
b_{n-1} &= \beta_0 a_{n-2} + \beta_1 a_{n-1} + \beta_2 \\
&\vdots \\
b_0 &= \beta_0 a_0 + \beta_1 a_1 + \ldots + \beta_{n-1} a_{n-1} + \beta_n
\end{aligned}
$$

Matrični zapis

$$
\begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
a_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & & & \ddots & \vdots \\
a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}
$$

Rješenjem matrične jednadžbe dobiju se koeficijenti β

Linearni kontinuirani sustavi s više ulaza i jednim izlazom

- Prikaz u prostoru stanja
  - Prijenosna matrica ima oblik retka
    - broj elemenata odgovara broju ulaza
  - koeficijenti brojnika i-te prijenosne funkcije (uz i-tu ulaznu varijablu, predstavljaju i-ti stupac matrice b
  - transformacijom prelaze u i-ti stupac matrice β

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_{11}\beta_{12} & \ldots & \beta_{1p} \\ \beta_{21}\beta_{22} & \ldots & \beta_{2p} \\ \beta_{31}\beta_{32} & \ldots & \beta_{3p} \\ & \ddots & \\ \beta_{n-11}\beta_{n-12} & \ldots & \beta_{n-1p} \\ \beta_{n1}\beta_{n2} & \ldots & \beta_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{p-1} \\ u_p \end{bmatrix}$$

Za vježbu

- Prikazati blokovskom shemom sustav opisan jednadžbama u prostoru stanja

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix} u \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \beta_0 u$$

Linearni kontinuirani sustavi s jednim ulazom i jednim izlazom

Iterativni oblik varijabli stanja

Opća prijenosna funkcija

$$Y(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0} U(s)$$

- određuju se nule i polovi
- brojnik i nazivnik prijenosne funkcije izražavaju se u obliku umnoška polinoma 1. i 2. reda
  - realni pol i nula određuju polinom 1. reda
  - konjugirano kompleksni par polova ili nula određuje polinom 2. reda
- definira se umnožak prijenosnih funkcija 1. i 2. reda od kojih svaka u realizaciji predstavlja jedan podsustav u kaskadi (seriji) cjelokupnog sustava

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = K \frac{s-n_1}{s-p_1} \frac{s-n_2}{s-p_2} \cdots \frac{s-n_n}{s-p_n}$$

  - n_i – nule prijenosne funkcije
  - p_i – polovi prijenosne funkcije

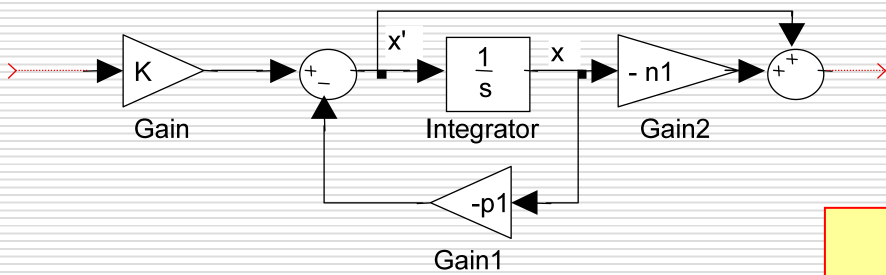
Linearni kontinuirani sustavi s jednim ulazom i jednim izlazom

Iterativni oblik varijabli stanja

- prijenosna funkcija oblika

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = K\frac{s-n_1}{s-p_1}$$

- određuje blokovsku shemu



Rezultantna matrica A je trokutasta

- ukupna prijenosna funkcija

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = K\frac{s-n_1}{s-p_1}\frac{s-n_2}{s-p_2}\cdots\frac{s-n_n}{s-p_n}$$

- određuje kaskadu subsistema
- iz sheme se odredi opis u prostoru stanja

Linearni kontinuirani sustavi s jednim ulazom i jednim izlazom

Paralelni oblik varijabli stanja

- prijenosna funkcija oblika

Opća prijenosna funkcija

$$Y(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0} U(s)$$

- prikazuje se u obliku sume kofaktora

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K_1}{s - p_1} + \frac{K_2}{s - p_2} + \cdots + \frac{K_n}{s - p_n}$$

  - p_i – polovi prijenosne funkcije
    - konjugirano kompleksni par polova određuje polinom 2. reda u nazivniku i 1. reda u brojniku

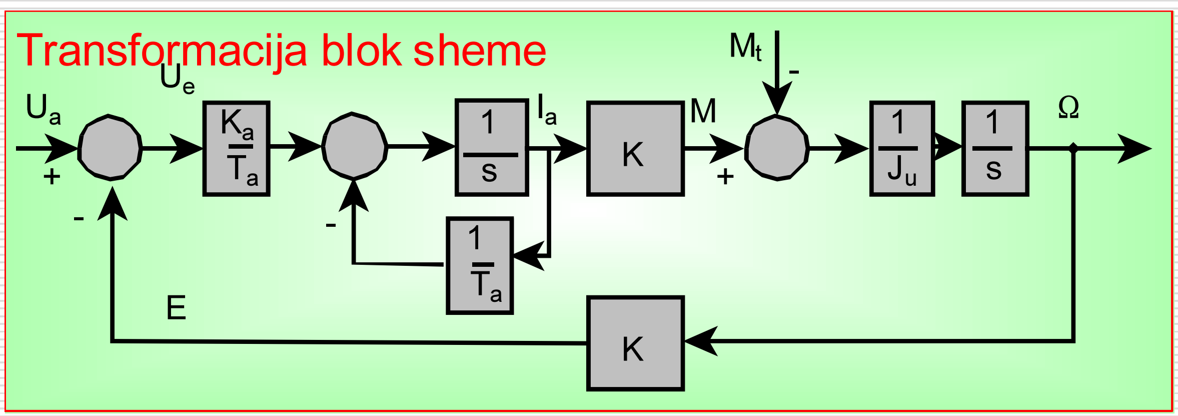
Rezultantna matrica A je dijagonalna

Konjugirano kompleksni polovi određuju Jordanove blokove

- blok shema – suma pojedinih dijelova
- iz sheme se odredi opis u prostoru stanja
  - izlazi iz integratora – varijable stanja

Primjer

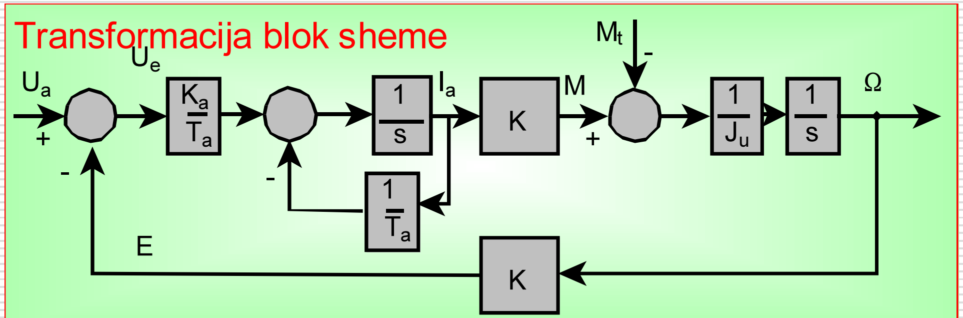
- DC elektromotor je prikazan shemom
  - potrebno je odrediti
    - diferencijalnu jednadžbu
    - zapis u prostoru stanja
    - prijenosnu matricu
    - direktni oblik zapisa u prostoru stanja



Odabir varijabli stanja:
$x_1 = \omega$,
$x_2 = i_a$.

Primjer: DC elektromotor

Transformacija blok sheme



Odabir varijabli stanja:

$x_1 = \omega$,

$x_2 = i_a$.

$$\dot{x}_1 = \omega' = \frac{1}{J_u}\left[K i_a - m_t\right]$$

$$\dot{x}_2 = i_a' = \frac{1}{T_a}\left[K_a u_a - i_a - K_a K \omega\right]$$

$$\dot{x}_1 = \frac{K}{J_u} x_2 - \frac{1}{J_u} m_t$$

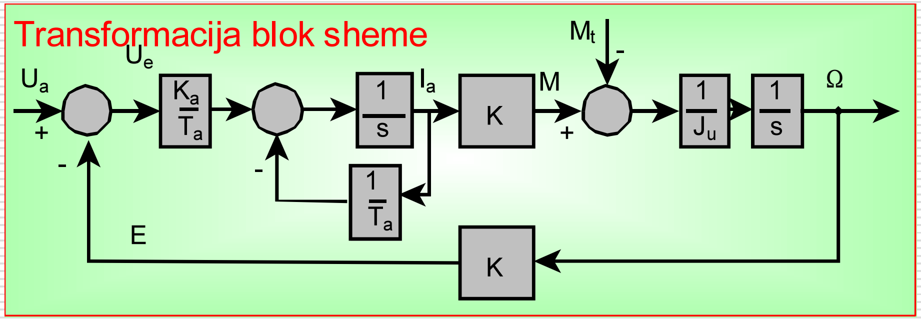
$$\dot{x}_2 = -\frac{K_a K}{T_a} x_1 - \frac{1}{T_a} x_2 + \frac{K_a}{T_a} u_a$$

Matrični oblik zapisa:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{K}{J_u} \\ -\frac{K_a K}{T_a} & -\frac{1}{T_a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{J_u} \\ \frac{K_a}{T_a} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a \\ m_t \end{bmatrix},$$

$$\omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Primjer: DC elektromotor



Matrični oblik zapisa:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & \frac{K}{J_u}\\ -\frac{K_aK}{T_a} & -\frac{1}{T_a}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{J_u}\\ \frac{K_a}{T_a} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_a\\ m_t\end{bmatrix},$$

$$\omega = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

Diferencijalna jednadžba

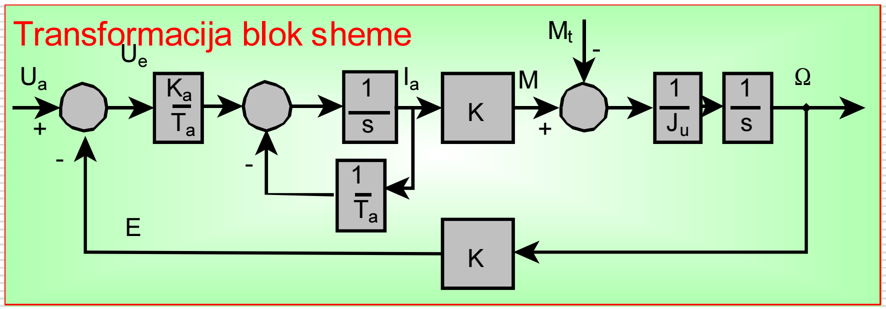
$$\frac{d^2\omega}{dt^2} + \frac{1}{T_a}\frac{d\omega}{dt} + \frac{1}{T_aT_m}\omega = \frac{1}{KT_aT_m}u_a - \left[\frac{1}{K_aT_mK^2}\frac{dm_t}{dt} + \frac{1}{K_aT_aT_mK^2}m_t\right]$$

$$T_m = \frac{J_u}{K_aK^2}$$

Brzina u laplaceovom području

$$\Omega(s) = \frac{\frac{1}{KT_aT_m}U_a(s) - \left[\frac{1}{K_aT_mK^2}s + \frac{1}{K_aT_aT_mK^2}\right]M_t(s)}{s^2 + \frac{1}{T_a}s + \frac{1}{T_aT_m}}$$

Primjer: DC elektromotor



Brzina u laplaceovom području

$$\Omega(s)=\frac{\frac{1}{KT_aT_m}U_a(s)-\left[\frac{1}{K_aT_mK^2}s+\frac{1}{K_aT_aT_mK^2}\right]M_t(s)}{s^2+\frac{1}{T_a}s+\frac{1}{T_aT_m}}$$

$$\Omega(s)=\frac{b_{01}U_a(s)+(b_{12}s+b_{02})M_t(s)}{s^2+a_1s+a_0},$$

$$b_{01}=\frac{1}{KT_aT_m},\quad b_{12}=-\frac{1}{K_aK^2T_m},\quad b_{02}=-\frac{1}{K_aK^2T_aT_m},$$

$$a_1=\frac{1}{T_a},\quad a_0=\frac{1}{T_aT_m}.$$

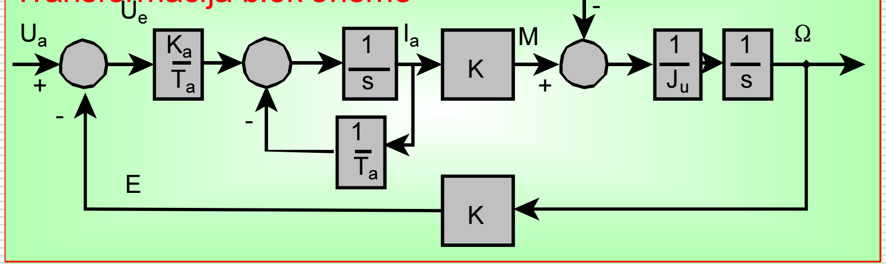
Polovi

$$p_{1,2}=\frac{-a_1\pm\sqrt{a_1^2-4a_0}}{2}.$$

$$\Omega(s)=\begin{bmatrix}\frac{b_{01}}{s^2+a_1s+a_0} & \frac{(b_{12}s+b_{02})}{s^2+a_1s+a_0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_a(s)\\ M_t(s)\end{bmatrix}$$

Primjer: DC elektromotor

Transformacija blok sheme



Brzina u laplaceovom području

$$\Omega(s)=\frac{\frac{1}{KT_aT_m}U_a(s)-\left[\frac{1}{K_aT_mK^2}s+\frac{1}{K_aT_aT_mK^2}\right]M_t(s)}{s^2+\frac{1}{T_a}s+\frac{1}{T_aT_m}}$$

$$\Omega(s)=\begin{bmatrix}\frac{b_{01}}{s^2+a_1s+a_0} & \frac{(b_{12}s+b_{02})}{s^2+a_1s+a_0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_a(s)\\ M_t(s)\end{bmatrix}$$

$$b_{01}=\frac{1}{KT_aT_m},\quad b_{12}=-\frac{1}{K_aK^2T_m},\quad b_{02}=-\frac{1}{K_aK^2T_aT_m},$$

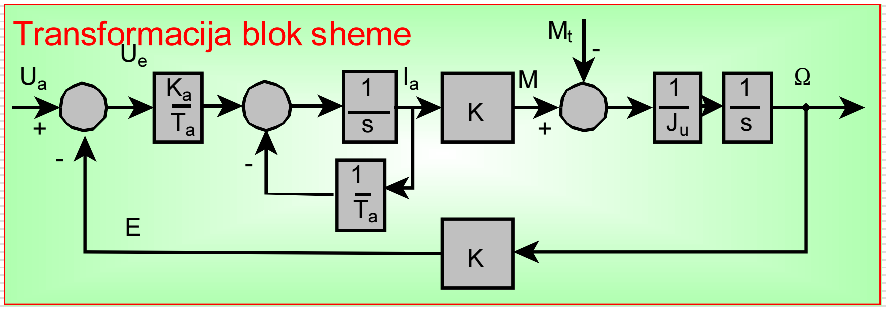
$$a_1=\frac{1}{T_a},\qquad a_0=\frac{1}{T_aT_m}.$$

Direktna transformacija prijenosne funkcije s obzirom na pojedini ulaz, dala bi nam različite matrice C za različite ulazne varijable.

Sustav je s jednim izlazom (ω) pa matrica C mora imati jedan redak.

- Postupak direktne pretvorbe u varijable stanja:
  - transformirati u standardni oblik svaku od dviju prijenosnih funkcija
  - transformirati dobivene jednadžbe stanja u kanonički upravljivi oblik (*matrica C ima jedinicu na prvom elementu i sve ostale nule, a matrica B ima elemente različite od nule*)

Primjer: DC elektromotor



$$\Omega(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{b_{01}}{s^2+a_1s+a_0} & \dfrac{(b_{12}s+b_{02})}{s^2+a_1s+a_0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_a(s)\\ M_t(s)\end{bmatrix}$$

$$b_{01}=\frac{1}{KT_aT_m},\quad b_{12}=-\frac{1}{K_aK^2T_m},\quad b_{02}=-\frac{1}{K_aK^2T_aT_m},$$

$$a_1=\frac{1}{T_a},\qquad a_0=\frac{1}{T_aT_m}.$$

Jednadžbe transformacije

$$\begin{bmatrix}0\\0\\b_{01}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\a_1&1&0\\a_0&a_1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_{01}\\\beta_{11}\\\beta_{21}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0\\b_{12}\\b_{02}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\a_1&1&0\\a_0&a_1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_{02}\\\beta_{12}\\\beta_{22}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\beta_{01}\\\beta_{11}\\\beta_{21}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\b_{01}\end{bmatrix}$$

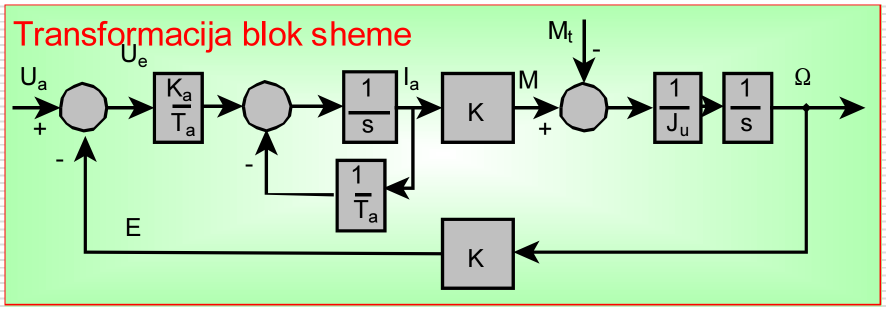
$$\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_{02}\\\beta_{12}\\\beta_{22}\end{bmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\b_{12}\\b_{02}-a_1b_{12}\end{bmatrix}$$

Kanonički osmotrivi oblik

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\-a_0&-a_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&b_{12}\\b_{01}&b_{02}-a_1b_{12}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_a\\m_t\end{bmatrix}$$

$$\omega=\begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_a\\m_t\end{bmatrix}$$

Primjer: DC elektromotor
Paralelni oblik



$$\Omega(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{b_{01}}{s^2+a_1s+a_0} & \dfrac{(b_{12}s+b_{02})}{s^2+a_1s+a_0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_a(s)\\ M_t(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}G_1(s) & G_2(s)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_a(s)\\ M_t(s)\end{bmatrix}$$

$$b_{01}=\frac{1}{KT_aT_m},\quad b_{12}=-\frac{1}{K_aK^2T_m},\quad b_{02}=-\frac{1}{K_aK^2T_aT_m},$$

$$a_1=\frac{1}{T_a},\qquad a_0=\frac{1}{T_aT_m}.$$

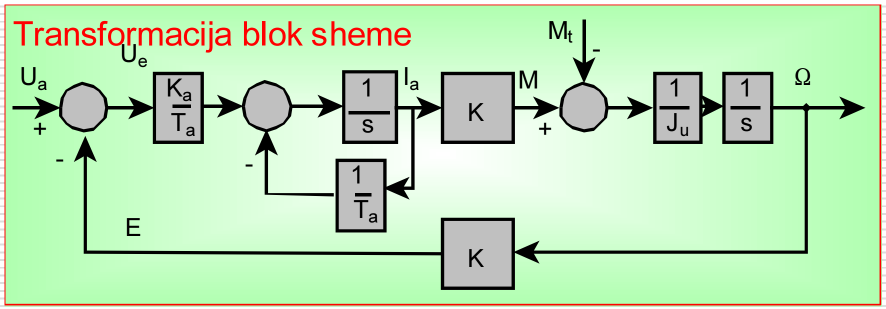
$$\Omega_1(s)=\frac{b_{01}}{s^2+a_1s+a_0}U_a(s)=$$
$$=\frac{b_{01}}{(s-p_1)(s-p_2)}U_a(s)=$$
$$=\left(\frac{K_1}{s-p_1}+\frac{K_2}{s-p_2}\right)U_a(s)$$

$$\Omega_2(s)=\frac{b_{12}s+b_{02}}{s^2+a_1s+a_0}M_t(s)=$$
$$=\frac{b_{12}s+b_{02}}{(s-p_1)(s-p_2)}M_t(s)=$$
$$=\left(\frac{K_3}{s-p_1}+\frac{K_4}{s-p_2}\right)M_t(s)$$

$$K_1=\frac{b_{01}}{p_1-p_2},\quad K_2=-K_1=\frac{b_{01}}{p_2-p_1}$$

$$K_3=\frac{b_{02}+b_{12}p_1}{p_1-p_2},\quad K_4=\frac{b_{02}+b_{12}p_2}{p_2-p_1}$$

Primjer: DC elektromotor Paralelni oblik



$$\Omega(s)=\left[\frac{b_{01}}{s^2+a_1s+a_0}\quad \frac{(b_{12}s+b_{02})}{s^2+a_1s+a_0}\right]\begin{bmatrix}U_a(s)\\ M_t(s)\end{bmatrix}=\left[G_1(s)\quad G_2(s)\right]\begin{bmatrix}U_a(s)\\ M_t(s)\end{bmatrix}$$

$$b_{01}=\frac{1}{KT_aT_m},\quad b_{12}=-\frac{1}{K_aK^2T_m},\quad b_{02}=-\frac{1}{K_aK^2T_aT_m},$$

$$a_1=\frac{1}{T_a},\qquad a_0=\frac{1}{T_aT_m}.$$

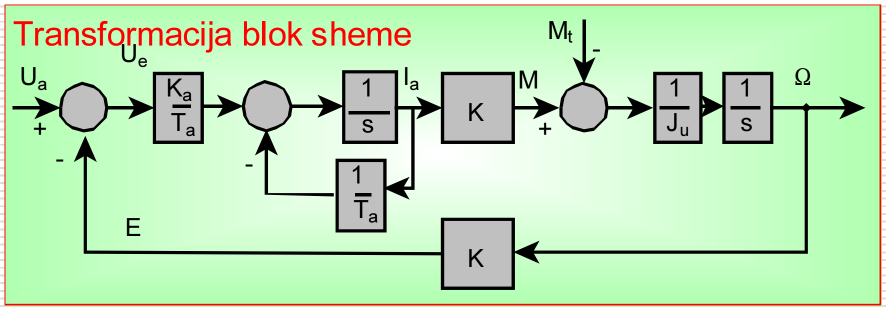
$$K_1=\frac{b_{01}}{p_1-p_2},\quad K_2=-K_1=\frac{b_{01}}{p_2-p_1}$$

$$K_3=\frac{b_{02}+b_{12}p_1}{p_1-p_2},\quad K_4=\frac{b_{02}+b_{12}p_2}{p_2-p_1}$$

$$\Omega(s)=\underbrace{\frac{K_1U_a(s)+K_3M_t(s)}{s-p_1}}_{X_1(s)}+\underbrace{\frac{K_2U_a(s)+K_4M_t(s)}{s-p_2}}_{X_2(s)}$$

$$\dot{x}_1=p_1x_1+K_1u_a+K_3m_t$$
$$\dot{x}_2=p_2x_2+K_2u_a+K_4m_t$$
$$\omega=x_1+x_2$$

Primjer: DC elektromotor
Paralelni oblik



$$\Omega(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{b_{01}}{s^2+a_1s+a_0} & \dfrac{(b_{12}s+b_{02})}{s^2+a_1s+a_0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_a(s)\\M_t(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}G_1(s) & G_2(s)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_a(s)\\M_t(s)\end{bmatrix}$$

$$b_{01}=\frac{1}{KT_aT_m},\quad b_{12}=-\frac{1}{K_aK^2T_m},\quad b_{02}=-\frac{1}{K_aK^2T_aT_m},$$

$$a_1=\frac{1}{T_a},\qquad a_0=\frac{1}{T_aT_m}.$$

$$\dot{x}_1=p_1x_1+K_1u_a+K_3m_t$$
$$\dot{x}_2=p_2x_2+K_2u_a+K_4m_t$$
$$\omega=x_1+x_2$$

$$K_1=\frac{b_{01}}{p_1-p_2},\quad K_2=-K_1=\frac{b_{01}}{p_2-p_1}\qquad K_3=\frac{b_{02}+b_{12}p_1}{p_1-p_2},\quad K_4=\frac{b_{02}+b_{12}p_2}{p_2-p_1}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}p_1 & 0\\0 & p_2\end{bmatrix}}_{\mathbf{A}}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix}K_1 & K_3\\K_2 & K_4\end{bmatrix}}_{\mathbf{B}}\begin{bmatrix}u_a\\m_t\end{bmatrix}$$

$$\omega=\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}}_{\mathbf{C}}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}}_{\mathbf{D}}\begin{bmatrix}u_a\\m_t\end{bmatrix}$$