

Signali i sustavi - Zadaci za vježbu

X. tjedan

Frekvencijske karakteristike

1. Kontinuirani sustav zadan je diferencijalnom jednačbom:

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = u(t).$$

Naći amplitudno-frekvencijsku i fazno-frekvencijsku karakteristiku sustava, te odziv na pobudu $u(t) = 5\cos(t)$. Početni uvjeti su $y(0^-) = 0$ i $y'(0^-) = 1$. Komentirajte izgled odziva za $t \gg 0$.

Rješenje:

Zadana je diferencijalna jednačba $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = u(t)$.

Njezina prijenosna funkcija

$$\begin{aligned} s^2 Y(s) + 5sY(s) + 6Y(s) &= U(s) \\ (s^2 + 5s + 6)Y(s) &= U(s) \\ H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{1}{s^2 + 5s + 6} = \frac{1}{(s+2)(s+3)} \end{aligned}$$

Polovi $s_1 = -2$, $s_2 = -3$. Kako su realni dijelovi oba pola negativni, sustav je stabilan, pa možemo tražiti frekvencijsku karakteristiku. Tražimo ju tako da uvrstimo $s = j\omega$:

$$H(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2 + 5j\omega + 6} = \frac{1}{6 - \omega^2 + 5\omega j}$$

Amplitudno – frekvencijska karakteristika

$$|H(j\omega)| = \left| \frac{1}{6 - \omega^2 + 5\omega j} \right| = \frac{1}{\sqrt{(6 - \omega^2)^2 + 25\omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{\omega^4 + 13\omega^2 + 36}}$$

Fazno – frekvencijska karakteristika

$$\angle H(j\omega) = -\operatorname{arctg}\left(\frac{5\omega}{6 - \omega^2}\right).$$

Kada tražimo odziv na pobudu, prvo moramo riješiti homogeni sustav. Homogeno rješenje je

$$y_h(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t}.$$

Zadana pobuda je $u(t) = 5\cos t$. Njezina frekvencija je $\omega = 1$. Amplituda signala na toj frekvenciji je

$$|H(j)| = \frac{1}{\sqrt{1 + 13 + 36}} = \frac{1}{\sqrt{50}} = \frac{1}{5\sqrt{2}}$$

Faza je $\angle H(j) = -\operatorname{arctg}\left(\frac{5}{6-1}\right) = -\operatorname{arctg}(1) = -\frac{\pi}{4}$.

Prisilni odziv

$$y_p(t) = 5 \cdot \frac{1}{5\sqrt{2}} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right).$$

Totalni odziv:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right).$$

Konstante nalazimo iz početnih uvjeta: $y(0^-) = y(0^+) = 0$, $y'(0^-) = y'(0^+) = 1$.

Totalni odziv u 0^+ : $y(0^+) = C_1 + C_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = C_1 + C_2 + \frac{1}{2} = 0$.

Derivacija totalnog odziva $y'(t) = -2C_1 e^{-2t} - 3C_2 e^{-3t} - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$

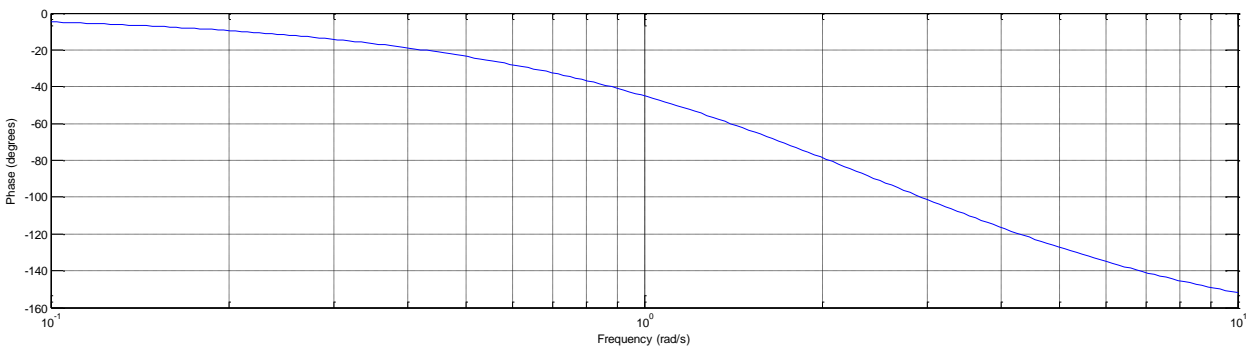
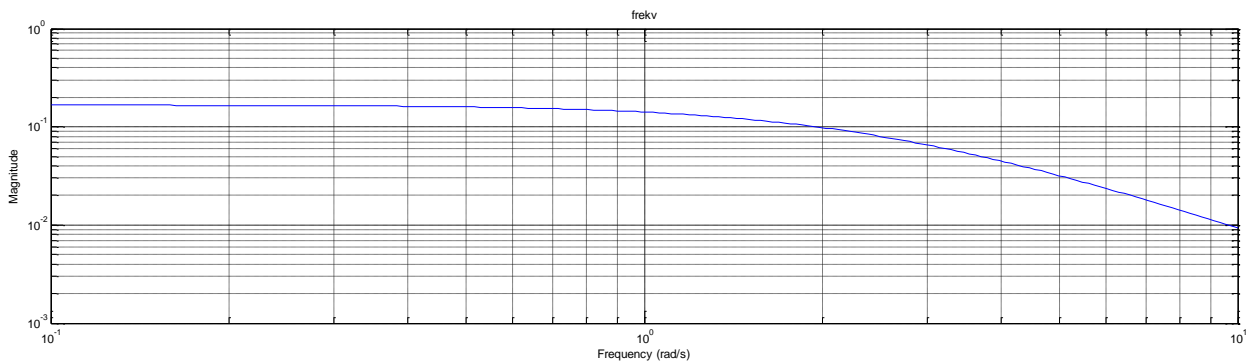
Derivacija totalnog odziva u 0^+ : $y'(0^+) = -2C_1 - 3C_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -2C_1 - 3C_2 + \frac{1}{2} = 1$.

Iz ove dvije jednadžbe sa dvije nepoznanice nađemo tražene konstante $C_1 = -1$, $C_2 = \frac{1}{2}$.

Pa je totalno rješenje

$$y(t) = -e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-3t} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right).$$

Za $t \gg 0$ se istitraju vlastite frekvencije sustava i ostane samo prisilno rješenje $y(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$.



2. Diskretan sustav zadan je jednađbom diferencija:

$$y(n) - 2y(n-1) + y(n-2) = u(n).$$

Naći amplitudno-frekvencijsku i fazno-frekvencijsku karakteristiku sustava, te odziv na pobudu $u(n) = 5$. Početni uvjeti su $y(-2) = 0$, $y(-1) = 1$. Komentirajte izgled odziva za $n \gg 0$.

Rješenje:

Zadana je jednađba diferencija $y(n) - 2y(n-1) + y(n-2) = u(n)$.

Njezina prijenosna funkcija

$$\begin{aligned} Y(z) - 2z^{-1}Y(z) + z^{-2}Y(z) &= U(z) \\ (1 - 2z^{-1} + z^{-2})Y(z) &= U(z) \\ H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} &= \frac{1}{1 - 2z^{-1} + z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 - 2z + 1} = \frac{z^2}{(z-1)^2}. \end{aligned}$$

Polovi $p_{1,2} = 1$, nule $z_{1,2} = 0$. Kako je amplituda polova jednaka 1, a oba pola su jednaka, sustav je nestabilan, te nema frekvencijske karakteristike.

Kada tražimo odziv na pobudu, prvo moramo riješiti homogeni sustav. Homogeno rješenje je

$$y_h(n) = (C_1 + C_2n) \cdot 1^n.$$

Zadana pobuda je $u(n) = 5 = 5 \cdot 1^n$ i jednake je frekvencije kao i homogeno rješenje, pa je pretpostavljeno partikularno rješenje: $y_p(n) = Kn^2 1^n$.

Pomaknuta partikularna rješenja:

$$\begin{aligned} y_p(n-1) &= K(n-1)^2 1^{n-1}, \\ y_p(n-2) &= K(n-2)^2 1^{n-2}. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem u zadanu jednađbu:

$$Kn^2 1^n - 2K(n-1)^2 1^{n-1} + K(n-2)^2 1^{n-2} = 5 \cdot 1^n,$$

nalazimo konstantu $K = \frac{5}{2}$.

Partikularno rješenje je $y_p(n) = \frac{5}{2}n^2 1^n$.

Totalni odziv: $y(n) = y_h(n) + y_p(n) = (C_1 + C_2n) \cdot 1^n + \frac{5}{2}n^2 1^n$.

Konstante nalazimo iz početnih uvjeta: $y(-2) = 0$, $y(-1) = 1 \rightarrow y(0) = 7$, $y(1) = 18$.

$$\begin{aligned} y(0) &= C_1 = 7, \\ y(1) &= C_1 + C_2 + \frac{5}{2} = 18, \\ C_1 &= 7, C_2 = 8.5. \end{aligned}$$

Pa je totalno rješenje

$$y(n) = (7 + 8.5n + 2.5n^2)1^n.$$

Za $n \gg 0$ amplituda teži u beskonačno.

3. Kontinuirani sustav zadan je diferencijalnom jednačbom:

$$y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = u(t).$$

Pronađite odziv sustava, ako je sustav pobuđen s $u(t) = \sin t$, za $t < 0$, te s $u(t) = 2 \sin 2t$, za $t \geq 0$. Komentirajte odziv sustava za $t \gg 0$.

Rješenje:

Zadana je diferencijalna jednačba $y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = u(t)$.

Njezina prijenosna funkcija

$$\begin{aligned} s^2 Y(s) + 2sY(s) + 5Y(s) &= U(s) \\ (s^2 + 2s + 5)Y(s) &= U(s) \\ H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{1}{s^2 + 2s + 5} = \frac{1}{(s + 1 + 2j)(s + 1 - 2j)} \end{aligned}$$

Polovi $s_1 = -1 - 2j$, $s_2 = -1 + 2j$. Kako su realni dijelovi oba pola negativni, sustav je stabilan, pa možemo tražiti frekvencijsku karakteristiku. Nju tražimo tako da uvrstimo $s = j\omega$:

$$H(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2 + 2j\omega + 5} = \frac{1}{5 - \omega^2 + j2\omega}.$$

Amplitudno – frekvencijska karakteristika

$$|H(j\omega)| = \left| \frac{1}{5 - \omega^2 + j2\omega} \right| = \frac{1}{\sqrt{(5 - \omega^2)^2 + 4\omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{\omega^4 - 6\omega^2 + 25}}.$$

Fazno – frekvencijska karakteristika

$$\angle H(j\omega) = -\arctg\left(\frac{2\omega}{5 - \omega^2}\right).$$

Kada tražimo odziv na pobudu, prvo moramo riješiti homogeni sustav. Homogeno rješenje je

$$y_h(t) = C_1 e^{(-1-2j)t} + C_2 e^{(-1+2j)t}.$$

Zadana pobuda je $u(t) = \sin t$ za $t < 0$. Frekvencija pobude je $\omega = 1$. Amplituda signala na toj frekvenciji:

$$|H(j)| = \frac{1}{\sqrt{1 - 6 + 25}} = \frac{1}{\sqrt{20}} = \frac{1}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{10}.$$

Faza je $\angle H(j) = -\arctg\left(\frac{2}{5-1}\right) = -\arctg\left(\frac{1}{2}\right) = -26.56^\circ$.

Prisilni odziv

$$y_{p1}(t) = \frac{\sqrt{5}}{10} \sin(t - 26.56^\circ), t < 0.$$

Za $t \geq 0$ pobuda je $u(t) = 2 \sin 2t$. Njezina frekvencija je $\omega = 2$. Amplituda signala na toj frekvenciji je:

$$|H(j2)| = \frac{1}{\sqrt{2^4 - 6 \cdot 2^2 + 25}} = \frac{1}{\sqrt{17}}.$$

Faza je $\angle H(j2) = -\arctg\left(\frac{2 \cdot 2}{5-2^2}\right) = -\arctg(4) = -75.96^\circ$.

Prisilni odziv

$$y_{p2}(t) = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} \sin(2t - 75.96^\circ), t \geq 0.$$

S obzirom da je sustav stabilan, a pobuda $u(t) = \sin t$ počela u $t = -\infty$, do trenutka $t = 0$ istitirao se prirodni odziv, te je ostalo samo partikularno rješenje, tj. prisilni odziv. Ovu činjenicu ćemo iskoristiti kako bismo našli početne uvjete u 0^- :

$$y_{p1}(0^-) = \frac{\sqrt{5}}{10} \sin(0^- - 26.56^\circ) = -0.1$$

$$y'_{p1}(t) = \frac{\sqrt{5}}{10} \cos(t - 26.56^\circ), t < 0.$$

$$y'_{p1}(0^-) = \frac{\sqrt{5}}{10} \cos(0^- - 26.56^\circ) = 0.2.$$

Preračunavamo početne uvjete u 0^+ :

$$y(0^+) = y(0^-) = -0.1,$$

$$y'(0^+) = y'(0^-) = 0.2.$$

Za $t \geq 0$ postoji i homogeno i partikularno rješenje, pa je totalno odziv:

$$y(t) = y_h(t) + y_{p2}(t) = C_1 e^{(-1-2j)t} + C_2 e^{(-1+2j)t} + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} \sin(2t - 75.96^\circ).$$

Konstante nalazimo iz upravo izračunatih početnih uvjeta.

$$\text{Totalni odziv u } 0^+: y(0^+) = C_1 + C_2 + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} \sin(-75.96^\circ) = -0.1.$$

$$\text{Derivacija totalnog odziva } y'(t) = (-1 - 2j)C_1 e^{(-1-2j)t} + (-1 + 2j)C_2 e^{(-1+2j)t} + \frac{4}{\sqrt{17}} \cos(2t - 75.96^\circ).$$

$$\text{Derivacija totalnog odziva u } 0^+: y'(0^+) = (-1 - 2j)C_1 + (-1 + 2j)C_2 + \frac{4}{\sqrt{17}} \cos(-75.96^\circ) = 0.2.$$

Iz ove dvije jednadžbe sa dvije nepoznanice nađemo tražene konstante

$$C_1 = 0.185 + 0.084j, C_2 = 0.185 - 0.084j.$$

Pa je totalno rješenje za $t \geq 0$ nakon kratkog sređivanja

$$y(t) = \left(e^{-t}(0.37 \cos 2t + 0.17 \sin 2t) + \frac{2}{\sqrt{17}} \sin(2t - 75.96^\circ) \right) \mu(t).$$

Totalno rješenje je:

$$y(t) = \begin{cases} \frac{\sqrt{5}}{10} \sin(t - 26.56^\circ), & t < 0 \\ e^{-t}(0.37 \cos 2t + 0.17 \sin 2t) + \frac{2}{\sqrt{17}} \sin(2t - 75.96^\circ), & t \geq 0 \end{cases}.$$

Za $t \gg 0$ se istitiraju vlastite frekvencije sustava i ostane samo prisilno rješenje

$$y(t) = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} \sin(2t - 75.96^\circ).$$

4. Kontinuirani sustav zadan je diferencijalnom jednačbom:

$$y'(t) + 3y(t) = u(t).$$

Ako je izlaz iz sustava u trenutku nula jednak nuli, $y(0^-) = 0$, naći odziv sustava na pobudu

$$u(t) = (\sin t + 2 \sin 2t + 3 \sin 3t + 4 \sin 4t)\mu(t).$$

Komentirajte izgled odziva za $t \gg 0$.

UPUTA: Koristite frekvencijsku karakteristiku sustava.

Rješenje:

Zadana je diferencijalna jednačba $y'(t) + 3y(t) = u(t)$.

Njezina prijenosna funkcija

$$\begin{aligned} sY(s) + 3Y(s) &= U(s) \\ (s + 3)Y(s) &= U(s) \\ H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{1}{s + 3}. \end{aligned}$$

Realni dio pola $s_1 = -3$ je negativan, pa je sustav stabilan, te možemo tražiti frekvencijsku karakteristiku. Nju tražimo tako da uvrstimo $s = j\omega$:

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 3}.$$

Amplitudno – frekvencijska karakteristika

$$|H(j\omega)| = \left| \frac{1}{j\omega + 3} \right| = \frac{1}{\sqrt{3^2 + \omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{9 + \omega^2}}.$$

Fazno – frekvencijska karakteristika

$$\angle H(j\omega) = -\arctg\left(\frac{\omega}{3}\right).$$

Kada tražimo odziv na pobudu, prvo moramo riješiti homogeni sustav. Homogeno rješenje je

$$y_h(t) = Ce^{-3t}.$$

Kako je sustav linearan vremenski stalan, pobudu možemo rastaviti na četiri pobude, te gledati odziv na svaki dio posebno.

Prvi dio pobude je $u(t) = \sin t \mu(t)$. Njegova frekvencija je $\omega = 1$. Amplituda signala na toj frekvenciji je $|H(j)| = \frac{1}{\sqrt{10}}$, a faza je $\angle H(j) = -\arctg\left(\frac{1}{3}\right) = -0.322$. Prisilni odziv $y_{p1}(t) = \frac{1}{\sqrt{10}} \sin(t - 0.322)$.

Drugi dio pobude je $u(t) = 2 \sin 2t \mu(t)$. Njegova frekvencija je $\omega = 2$. Amplituda signala na toj frekvenciji je $|H(j)| = \frac{1}{\sqrt{13}}$, a faza je $\angle H(j) = -\arctg\left(\frac{2}{3}\right) = -0.588$. Prisilni odziv $y_{p2}(t) = \frac{2}{\sqrt{13}} \sin(2t - 0.588)$.

Treći dio pobude je $u(t) = 3 \sin 3t \mu(t)$. Njegova frekvencija je $\omega = 3$. Amplituda signala na toj frekvenciji je $|H(j)| = \frac{1}{\sqrt{18}}$, a faza je $\angle H(j) = -\arctg(1) = -0.785$. Prisilni odziv $y_{p3}(t) = \frac{3}{\sqrt{18}} \sin(3t - 0.785)$.

Četvrti dio pobude je $u(t) = 4 \sin 4t \mu(t)$. Njegova frekvencija je $\omega = 4$. Amplituda signala na toj frekvenciji je $|H(j)| = \frac{1}{5}$, a faza je $\angle H(j) = -\arctg\left(\frac{4}{3}\right) = -0.927$. Prisilni odziv $y_{p4}(t) = \frac{4}{5} \sin(4t - 0.927)$.

Totalni odziv:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= y_h(t) + y_{p1}(t) + y_{p2}(t) + y_{p3}(t) + y_{p4}(t) \\
 &= Ce^{-3t} + \frac{1}{\sqrt{10}} \sin(t - 0.322) + \frac{2}{\sqrt{13}} \sin(2t - 0.588) + \frac{3}{\sqrt{18}} \sin(3t - 0.785) \\
 &\quad + \frac{4}{5} \sin(4t - 0.927).
 \end{aligned}$$

Konstantu nalazimo iz početnog uvjeta: $y(0^-) = y(0^+) = 0$.

Totalni odziv u 0^+ :

$$y(0^+) = C + \frac{1}{\sqrt{10}} \sin(-0.322) + \frac{2}{\sqrt{13}} \sin(-0.588) + \frac{3}{\sqrt{18}} \sin(-0.785) + \frac{4}{5} \sin(-0.927) = 0.$$

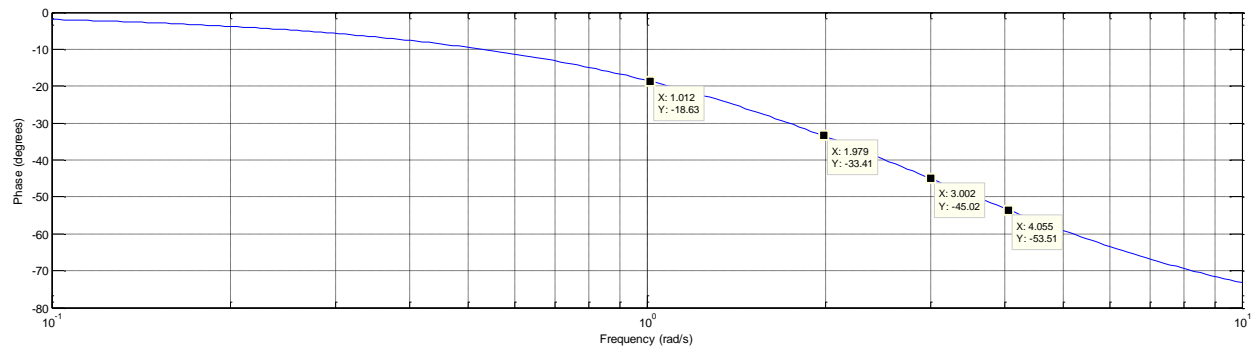
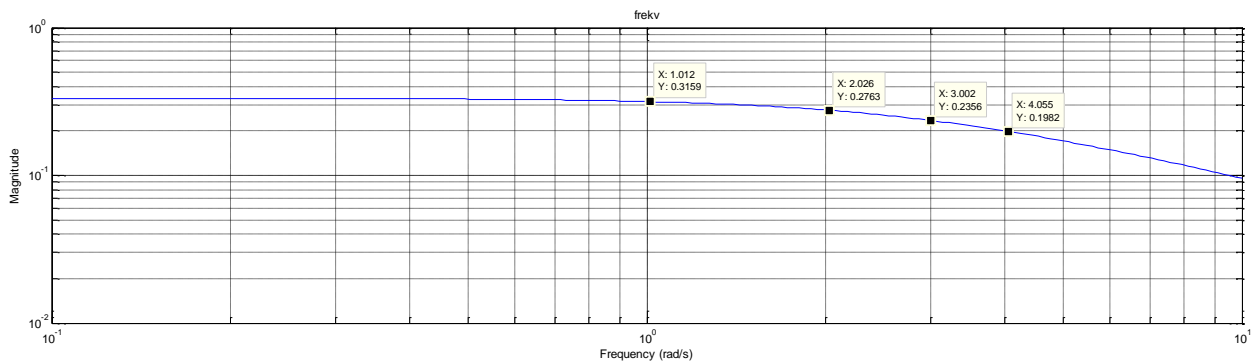
Tražena konstanta iznosi $C = 1.55$.

Pa je totalno rješenje

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \left(1.55e^{-3t} + \frac{1}{\sqrt{10}} \sin(t - 0.322) + \frac{2}{\sqrt{13}} \sin(2t - 0.588) + \frac{3}{\sqrt{18}} \sin(3t - 0.785) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{4}{5} \sin(4t - 0.927) \right) \mu(t).
 \end{aligned}$$

Za $t \gg 0$ se istitraju vlastite frekvencije sustava i ostane samo prisilno rješenje

$$y(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{10}} \sin(t - 0.322) + \frac{2}{\sqrt{13}} \sin(2t - 0.588) + \frac{3}{\sqrt{18}} \sin(3t - 0.785) + \frac{4}{5} \sin(4t - 0.927) \right) \mu(t).$$



5. Diskretan sustav zadan je jednačbom diferencija:

$$y(n) + 0.5y(n - 1) = u(n).$$

Ako je početni uvjet $y(-1) = 1$, naći odziv sustava na pobudu

$$u(n) = \left(\cos\left(\frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{5}\right) + 2 \cos \pi n + 3 \cos(1.5\pi n) + 4 \cos(2\pi n) \right) \mu(n).$$

Komentirajte izgled odziva za $n \gg 0$.

Rješenje:

Zadana je jednačba diferencija $y(n) + 0.5y(n - 1) = u(n)$.

Njezina prijenosna funkcija

$$\begin{aligned} Y(z) + 0.5z^{-1}Y(z) &= U(z) \\ (1 + 0.5z^{-1})Y(z) &= U(z) \\ H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} &= \frac{1}{1 + 0.5z^{-1}} = \frac{z}{z + 0.5}. \end{aligned}$$

Pol $p_1 = -0.5$, kako je apsolutna vrijednost pola manja od 1 sustav je stabilan.

Kada tražimo odziv na pobudu, prvo moramo riješiti homogeni sustav. Homogeno rješenje je

$$y_h(n) = C \left(-\frac{1}{2} \right)^n.$$

Frekvencijsku karakteristiku dobijemo uvrštavanjem $z = e^{j\Omega}$ u prijenosnu funkciju

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1 + 0.5e^{-j\Omega}} = \frac{1}{1 + 0.5(\cos \Omega - j \sin \Omega)}.$$

Amplitudno – frekvencijska karakteristika

$$\begin{aligned} |H(e^{j\Omega})| &= \left| \frac{1}{1 + 0.5e^{-j\Omega}} \right| = \left| \frac{1}{1 + 0.5(\cos \Omega - j \sin \Omega)} \right| = \frac{1}{\sqrt{(1 + 0.5 \cos \Omega)^2 + (0.5 \sin \Omega)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1.25 + \cos \Omega}}. \end{aligned}$$

Fazno – frekvencijska karakteristika

$$\angle H(j\Omega) = -\arctg\left(\frac{-0.5 \sin \Omega}{1 + 0.5 \cos \Omega}\right) = \arctg\left(\frac{\sin \Omega}{2 + \cos \Omega}\right).$$

Kako je sustav linearan vremenski stalan, pobudu možemo rastaviti na četiri pobude, te gledati odziv na svaki dio posebno.

Prvi dio pobude je $u_1(n) = \cos\left(\frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{5}\right) \mu(n)$. Njegova frekvencija je $\Omega = \frac{\pi}{2}$. Amplituda signala na toj frekvenciji je $\left| H\left(e^{j\frac{\pi}{2}}\right) \right| = \frac{1}{\sqrt{1.25 + \cos\frac{\pi}{2}}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, a faza je $\angle H\left(e^{j\frac{\pi}{2}}\right) = \arctg\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{2 + \cos\frac{\pi}{2}}\right) = 0.46$. Prisilni odziv

$$y_{p1}(n) = \frac{2\sqrt{5}}{5} \cos\left(\frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{5} + 0.46\right) \mu(n) = \frac{2\sqrt{5}}{5} \cos\left(\frac{\pi n}{2} + 1.09\right) \mu(n).$$

Drugi dio pobude je $u_2(n) = 2 \cos \pi n \mu(n)$. Njegova frekvencija je $\Omega = \pi$. Amplituda signala na toj frekvenciji je $|H(e^{j\pi})| = \frac{1}{\sqrt{1.25 + \cos \pi}} = 2$, a faza je $\angle H(e^{j\pi}) = \arctg\left(\frac{\sin \pi}{2 + \cos \pi}\right) = 0$. Prisilni odziv $y_{p2}(n) = 2 \cdot 2 \cos(\pi n) \mu(n) = 4 \cos(\pi n) \mu(n)$.

Treći dio pobude je $u_3(n) = 3 \cos(1.5\pi n) \mu(n)$. Njegova frekvencija je $\Omega = 1.5\pi$. Amplituda signala na toj frekvenciji je $|H(e^{j1.5\pi})| = \frac{1}{\sqrt{1.25 + \cos 1.5\pi}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, a faza je $\angle H(e^{j1.5\pi}) = \arctg\left(\frac{\sin 1.5\pi}{2 + \cos 1.5\pi}\right) = -0.46$. Prisilni odziv $y_{p3}(n) = 3 \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} \cos(1.5\pi n - 0.46) \mu(n) = \frac{6\sqrt{5}}{5} \cos(1.5\pi n - 0.46) \mu(n)$.

Četvrti dio pobude je $u_4(n) = 4 \cos(2\pi n) \mu(n)$. Njegova frekvencija je $\Omega = 2\pi$. Amplituda signala na toj frekvenciji je $|H(e^{j2\pi})| = \frac{1}{\sqrt{1.25 + \cos 2\pi}} = \frac{2}{3}$, a faza je $\angle H(e^{j2\pi}) = \arctg\left(\frac{\sin 2\pi}{2 + \cos 2\pi}\right) = 0$. Prisilni odziv $y_{p4}(n) = 4 \cdot \frac{2}{3} \cos(2\pi n) \mu(n) = \frac{8}{3} \cos(2\pi n) \mu(n)$.

Totalni odziv:

$$\begin{aligned} y(n) &= y_h(n) + y_{p1}(n) + y_{p2}(n) + y_{p3}(n) + y_{p4}(n) \\ &= \left(C \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2\sqrt{5}}{5} \cos\left(\frac{\pi n}{2} + 1.09\right) + 4 \cos(\pi n) + \frac{6\sqrt{5}}{5} \cos(1.5\pi n - 0.46) \right. \\ &\quad \left. + \frac{8}{3} \cos(2\pi n) \right) \mu(n). \end{aligned}$$

Konstante nalazimo iz početnog uvjeta: $y(-1) = 1$.

$$\begin{aligned} y(0) &= u(0) - 0.5y(-1) = 9.3, \\ y(0) &= \left(C + \frac{2\sqrt{5}}{5} \cos(1.09) + 4 \cos(0) + \frac{6\sqrt{5}}{5} \cos(-0.46) + \frac{8}{3} \cos(0) \right) \mu(0) \\ &= C + 0.414 + 4 + 2.4 + 2.66 \\ C &= -0.18. \end{aligned}$$

Pa je totalno rješenje

$$\begin{aligned} y(n) &= \left(-0.18 \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2\sqrt{5}}{5} \cos\left(\frac{\pi n}{2} + 1.09\right) + 4 \cos(\pi n) + \frac{6\sqrt{5}}{5} \cos(1.5\pi n - 0.46) \right. \\ &\quad \left. + \frac{8}{3} \cos(2\pi n) \right) \mu(n). \end{aligned}$$

Za $n \gg 0$ homogeno rješenje se istira i ostaje samo partikularno rješenje.