Spektar signala

Obrada informacija

Damir Seršić

http://www.fer.unizg.hr/predmet/obrnif

Teme predavanja

- Fourierova transformacija: 4 varijante
- Matrica diskretne Fourierove transformacije (DFT matrica)
- DFT filtarski slog
- Brza Fourierova transformacija (FFT)

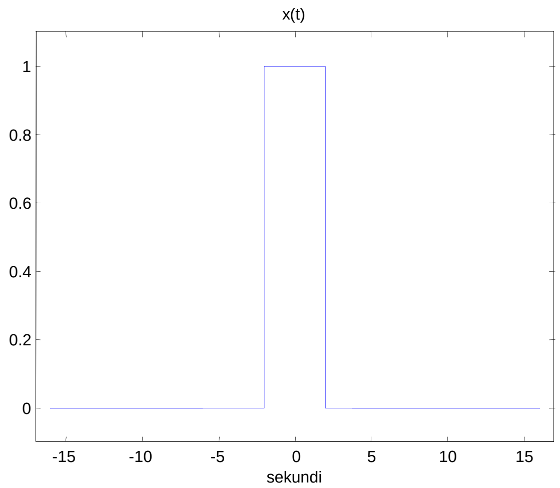
1.) Fourierov integral (CTFT)

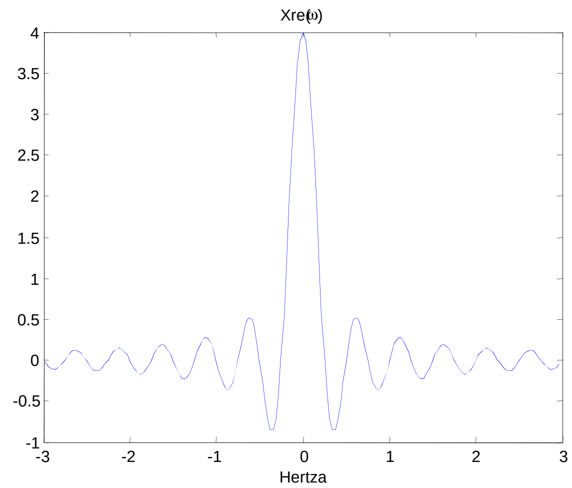
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{x(t)}_{signal} \underbrace{e^{-j\omega t}}_{\substack{kompleksna \\ harmonijska \\ funkcija}} dt = X(\omega)$$

- $X(\omega)$ - mjera sličnosti između $x(t)$ i $e^{j\omega t}$, odnosno mjera frekvencijskog sadržaja $x(t)$.
- Inverzna formula:

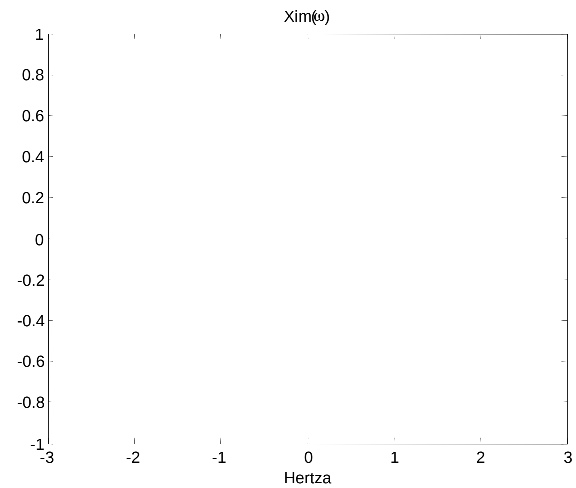
$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Fourierov integral, primjer 1

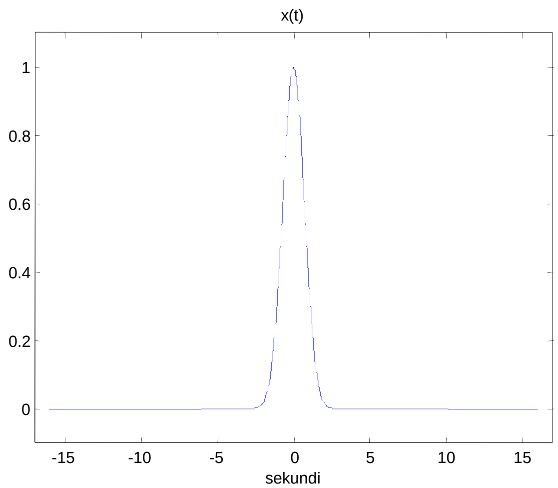


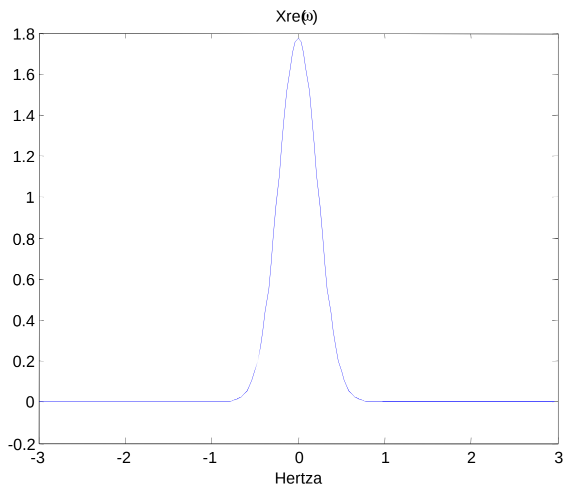


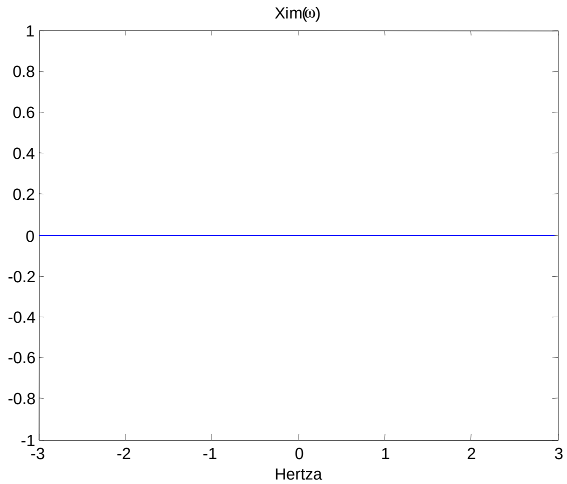
$$\int_{-W/2}^{+W/2} 1 \cdot e^{-j\omega t}\, dt = W \frac{\sin \omega \frac{W}{2}}{\omega \frac{W}{2}}$$



Fourierov integral, primjer 2







$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2a^2}} e^{-j\omega t} dt = a\sqrt{2\pi} e^{-\frac{a^2\omega^2}{2}}$$

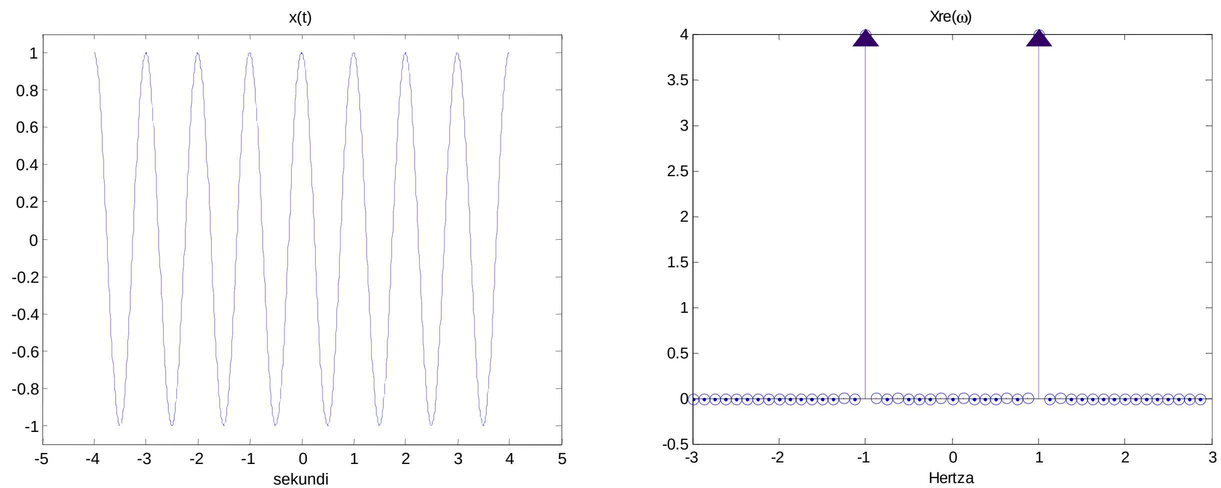
Parsevalov teorem

- Fourierova transformacija čuva energiju signala (Parsevalov teorem):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 \, d\omega$$

Fourierova transformacija

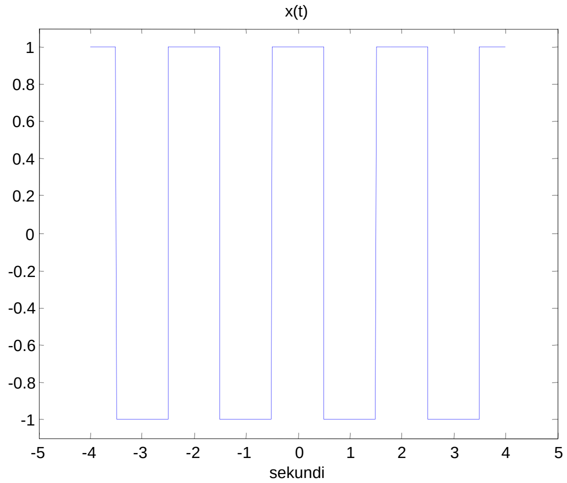
- Harmonijski signal: Fourierov integral divergira.

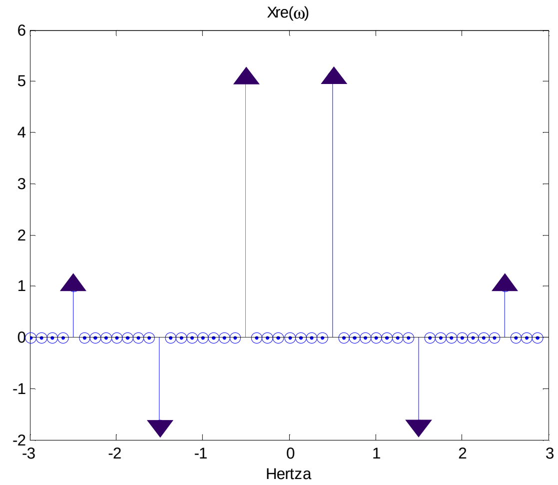


$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \Omega t \cdot e^{-j\omega t} dt = \pi[\delta(\omega+\Omega)+\delta(\omega-\Omega)]$$

Fourierova transformacija

- Pravokutni ili neki drugi periodički signal: Fourierov integral divergira.





$$X(\omega)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4}{(2n+1)}\left[\delta(\omega+(2n+1)\Omega)+\delta(\omega-(2n+1)\Omega)\right]$$

2.) Fourierov red (CTFS)

- Prikladniji za analizu periodičkih signala $x_{T}(t+T) = x_{T}(t)$.
- Koeficijente Fourierovog reda računamo integrirajući samo po jednoj periodi T i to za diskretne frekvencije (višekratnike od Ω).
- Definicija:

$$\omega \rightarrow n\Omega, \quad \Omega = 2\pi / \mathrm{T}$$

$$X(n) = \frac{1}{\mathrm{T}} \int_{0}^{\mathrm{T}} x_{\mathrm{T}}(t)\, e^{-jn\Omega t} dt$$

koeficijenti Fourierovog reda

Fourierov red

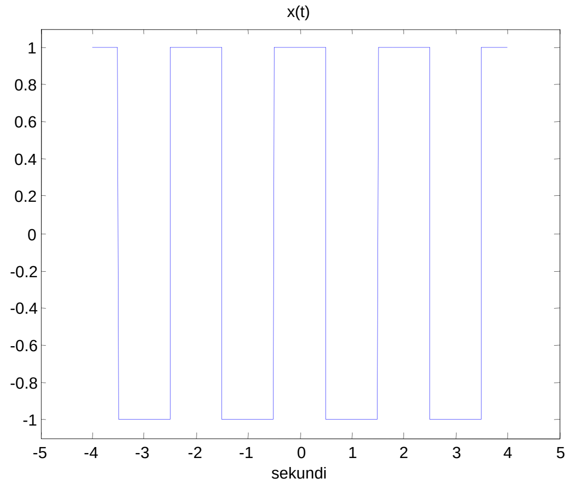
$$x_{\mathrm{T}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n) \cdot e^{jn\Omega t}$$

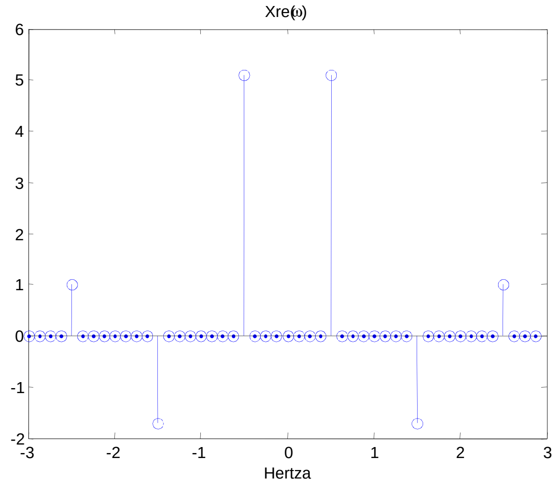
- Periodički signal možemo potpuno rekonstruirati iz koeficijenata reda.
- I ovdje je skup funkcija razlaganja ortogonalan i važi Parsevalov teorem:

$$\frac{1}{T}\int_{0}^{\mathrm{T}} \left| x_{\mathrm{T}}(t) \right|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| X(n) \right|^2$$

Fourierov red, primjer

- Pravokutni signal





$$x(t)=\frac{4}{\pi}\left(\cos\Omega t+\frac{\cos 3\Omega t}{3}+\frac{\cos 5\Omega t}{5}+\ldots\right)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\Omega t}{(2n+1)}$$

$$=\frac{2}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\Omega t}{(2n+1)} \qquad X(2n+1)=\frac{2}{\pi}\frac{1}{2n+1},\ X(2n)=0.$$

3.) Fourierova transformacija vremenski diskretnih signala

- Definicija DTFT:

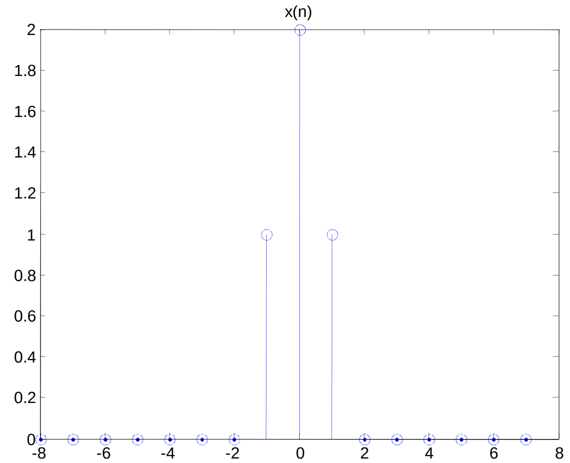
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, e^{-j\omega n} \quad = \quad X\left(e^{j\omega}\right)$$

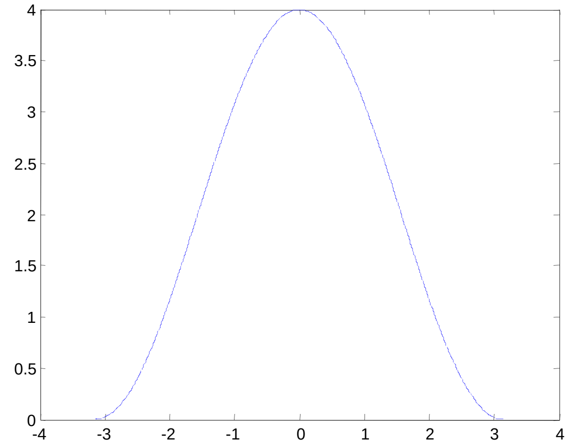
- $X(e^{j\omega})$ - spektar periodičan s periodom 2π.
- Inverzna transformacija:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j\omega}\right) e^{j\omega n} d\omega$$

Fourierova transformacija vremenski diskretnih signala

- Diskretni signal





$$x(n) = \ldots 0,0,1,\underline{2},1,0,0,\ldots$$

$$X\left(e^{j\omega}\right) = 1 \cdot e^{-j\omega(-1)} + 2 \cdot e^{j\omega 0} + 1 \cdot e^{-j\omega 1} = 2 + 2\cos\omega.$$

4.) Diskretna Fourierova transformacija (DFT)

- Definicija:

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = X(k)$$

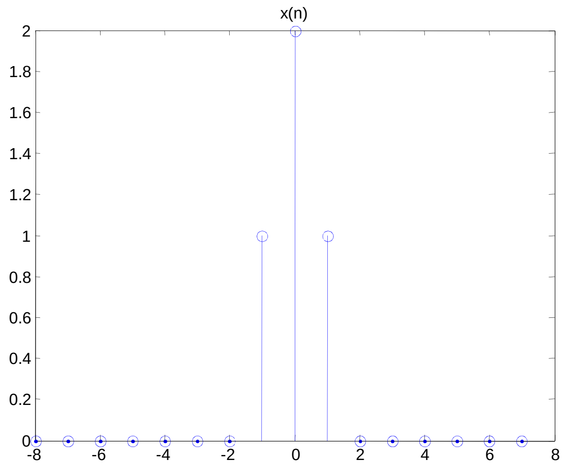
- $x(n)$ i $X(k)$ - periodični s periodom N .
- Inverzna transformacija:

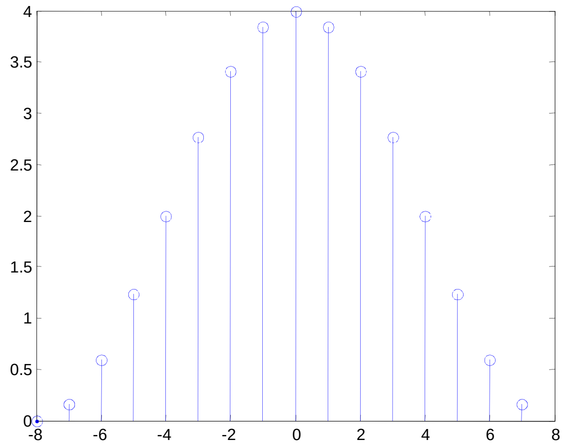
$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

- Napomena: DTFS i DFT se razlikuju samo konstantom 1/N (i interpretacijom), a mi smo odabrali DFT. Neki autori oba izraza normiraju sa $1/\sqrt{N}$, a rezultat također označavaju kao DFT.

DFT, primjer 1

- Diskretni signal i transformacija





$$x(n) = \{0,0,0,0,0,0,0,1,\underline{2},1,0,0,0,0,0,0\}_{16}$$

$$X(k) = 1 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{16}k(-1)} + 2 \cdot e^{j\frac{2\pi}{16}k \cdot 0} + 1 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{16}k \cdot 1} = 2 + 2\cos\frac{2\pi}{16}k.$$

Četiri oblika Fourierove transformacije

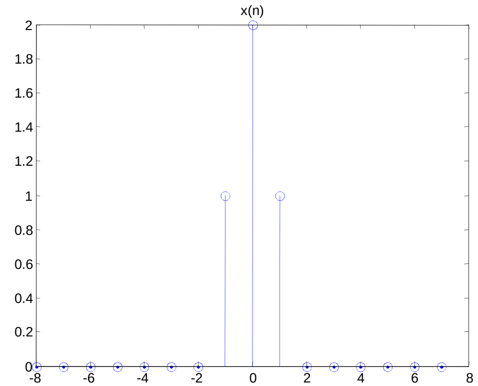
	periodički signal	aperiodički signal	
kontinuirani signali	Fourierov red (CTFS) $$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} X[n]e^{jn\Omega t}$$ $$X[n]=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jn\Omega t}dt$$ $x(t)$ ima periodu T $\Omega=\frac{2\pi}{T}$	Fourierov integral (CTFT) $$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$ $$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$	aperiodički spektar
diskretni signali	Diskretna Fourierova transformacija $$x[k]=\frac{1}{N}\sum_N X[n]e^{jn\Omega k}$$ $$X[n]=\sum_N x[k]e^{-jn\Omega k}$$ $x(k)$ i $X[n]$ imaju period N $\Omega=\frac{2\pi}{N}$	Fourierova transformacija diskretnih signala (DTFT) $$x[k]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega k}d\omega$$ $$X(e^{j\omega})=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-j\omega k}$$ $X(e^{j\omega})$ ima periodu 2π	periodički spektar
	diskretni spektar	kontinuirani spektar	

DFT_N i periodičko proširenje signala

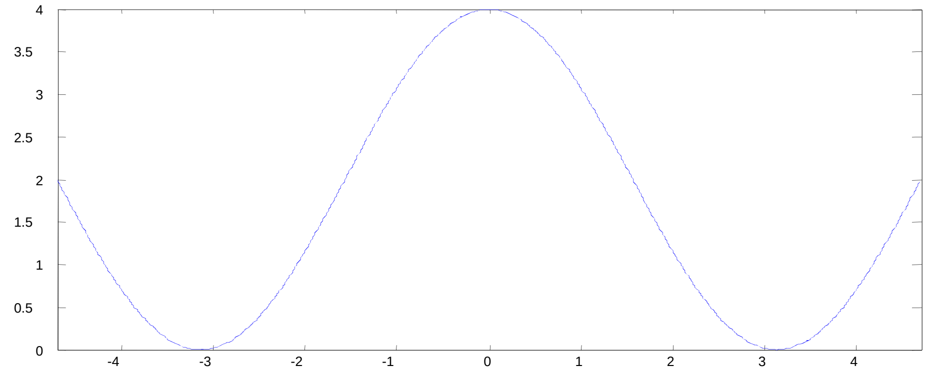
- DFT_N preslikava niz od N brojeva na niz od N (kompleksnih) brojeva.
- Izrazi za DFT_N i DFT_N^{-1} ne sadrže integrale: lako se realiziraju na računalu.
- Dobivamo uzorke spektra diskretnog signala.
- To je ustvari spektar periodično proširenog signala, periode N.

DFT$_N$ i periodičko proširenje signala

$$x(n) = \ldots 0,0,1,\underline{2},1,0,0,\ldots \qquad X\left(e^{j\omega}\right) = 2 + 2\cos\omega.$$



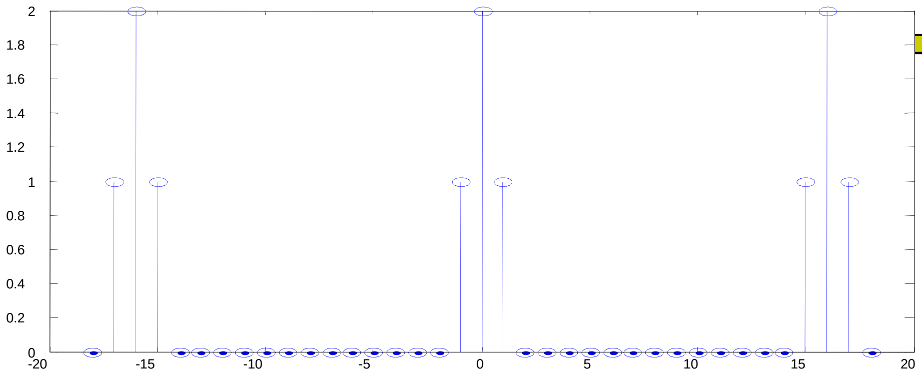
FT VDS

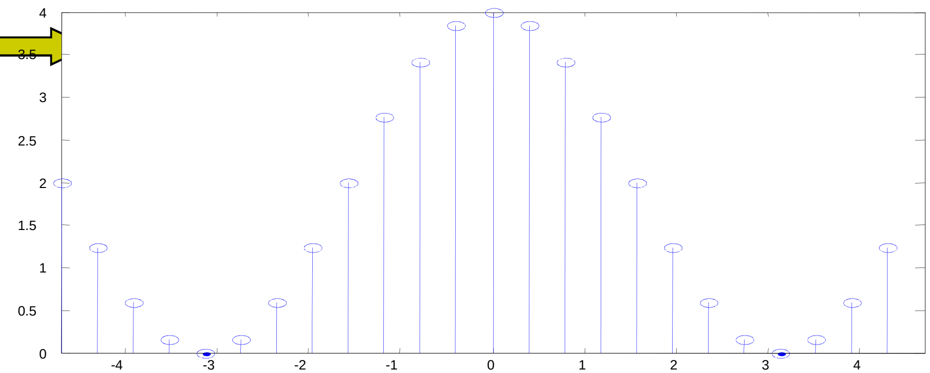


periodičko proširenje

diskretizacija

DFT





$$\hat{x}(n) = \{0,0,0,0,0,0,0,1,\underline{2},1,0,0,0,0,0,0\}_{16} \qquad X(k) = 2 + 2\cos\frac{2\pi}{16}k$$

DFT$_4$, primjer 2

- Neka je N=4: $x[n]=\{x[0],x[1],x[2],x[3]\}_4$

$$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}nk}$$

$$X[0]=x[0]e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}0\cdot 0}+x[1]e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}1\cdot 0}+x[2]e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}2\cdot 0}+x[3]e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}3\cdot 0},$$
$$X[1]=x[0]e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}0\cdot 1}+x[1]e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}1\cdot 1}+x[2]e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}2\cdot 1}+x[3]e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}3\cdot 1},$$
$$X[2]=x[0]e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}0\cdot 2}+x[1]e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}1\cdot 2}+x[2]e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}2\cdot 2}+x[3]e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}3\cdot 2},$$
$$X[3]=x[0]e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}0\cdot 3}+x[1]e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}1\cdot 3}+x[2]e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}2\cdot 3}+x[3]e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}3\cdot 3}.$$

DFT$_4$, matrični prikaz

- Prethodne 4 jednadžbe se mogu matrično zapisati:

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ X[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{4}} & e^{-j\frac{4\pi}{4}} & e^{-j\frac{6\pi}{4}} \\ 1 & e^{-j\frac{4\pi}{4}} & e^{-j\frac{8\pi}{4}} & e^{-j\frac{12\pi}{4}} \\ 1 & e^{-j\frac{6\pi}{4}} & e^{-j\frac{12\pi}{4}} & e^{-j\frac{18\pi}{4}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{bmatrix}$$

- Linearni operator koji definira DFT$_N$ preslikavanje $x \to X$ je N x N matrica.

DFT$_N$, matrični prikaz

- U našem primjeru, to je matrica $\mathbf{W}_4$:

$$\mathbf{W}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}$$

- Općenito:

$$W_{\mathrm{N}} = e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}} \qquad \mathbf{W}_{\mathrm{N}} = \left[W_{\mathrm{N}}^{km} \right]$$

Inverzna DFT$_N$, matrični prikaz

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

- Za N=4:

$$\begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{bmatrix} = \frac{1}{N}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{j\frac{2\pi}{4}} & e^{j\frac{4\pi}{4}} & e^{j\frac{6\pi}{4}} \\ 1 & e^{j\frac{4\pi}{4}} & e^{j\frac{8\pi}{4}} & e^{j\frac{12\pi}{4}} \\ 1 & e^{j\frac{6\pi}{4}} & e^{j\frac{12\pi}{4}} & e^{j\frac{18\pi}{4}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ X[3] \end{bmatrix}$$

- Općenito:

$$W_{\mathrm{N}} = e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}} \qquad \mathbf{W}_N^{-1} = \frac{1}{N}\left[W_{\mathrm{N}}^{-km}\right]$$

$$\mathbf{W}_N^{-1} \cdot \mathbf{W}_N = \mathbf{I}$$

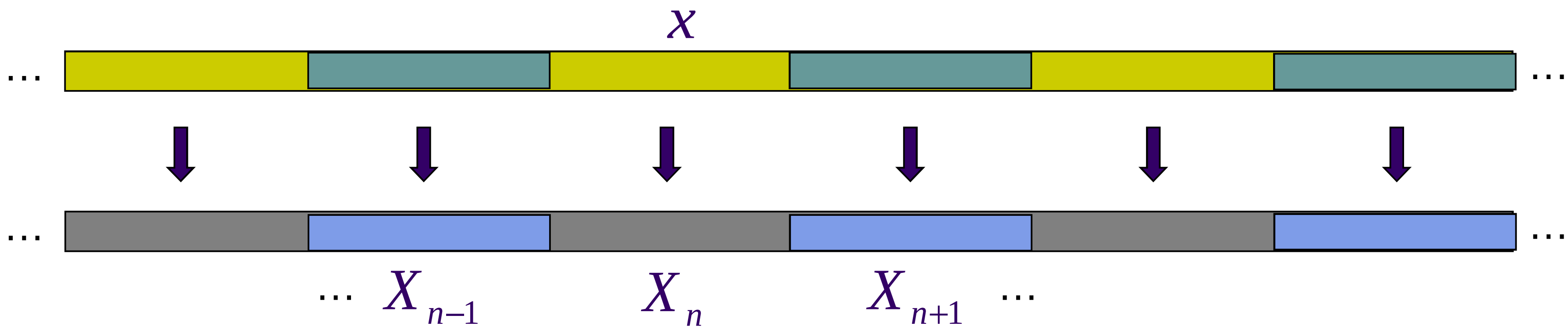
DFT: broj operacija

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N^{1\cdot 1} & \cdots & W_N^{1\cdot(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{(N-1)\cdot 1} & \cdots & W_N^{(N-1)\cdot(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}$$

- Direktna implementacija DFT_N za signal od N uzoraka zahtijeva:
  - N x N kompleksnih množenja
  - N x (N-1) kompleksnih zbrajanja
- Broj operacija raste s kvadratom dužine signala.

DFT$_N$: blok po blok

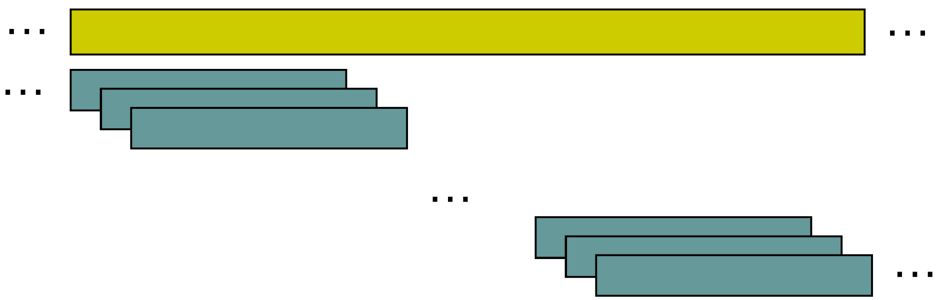
- Signal beskonačne dužine podijelimo u blokove dužine N.
- Na svakom bloku zasebno računamo DFT$_N$:



- Rezultat ima frekvencijsku, ali i vremensku dimenziju: imamo po N uzoraka DFT spektra svakih N uzoraka vremena.

DFT$_N$: korak po korak

- Signal beskonačne dužine množimo s pomičnim vremenskim otvorom dužine N, na kojem računamo DFT$_N$:



- Otvor pomičemo korak po korak: imamo po N uzoraka DFT$_N$ spektra za <u>svaki</u> uzorak vremena.

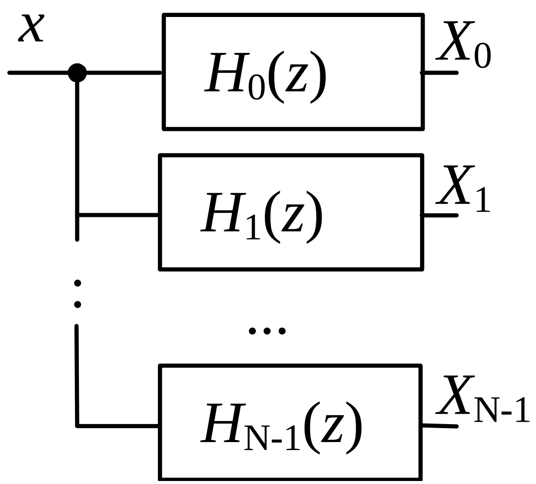
DFT matrica

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N^{1\cdot 1} & \cdots & W_N^{1\cdot(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{(N-1)\cdot 1} & \cdots & W_N^{(N-1)\cdot(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}$$

- Svaki redak matrice može se interpretirati kao FIR filtar dužine *N* sa kompleksnim koeficijentima.
- *k*-ti filtar:

$$x \longrightarrow \boxed{H_k(z) = 1 + zW_N^{k\cdot 1} + z^2 W_N^{k\cdot 2} + \ldots + z^{N-1} W_N^{k\cdot(N-1)}} \longrightarrow X_k$$

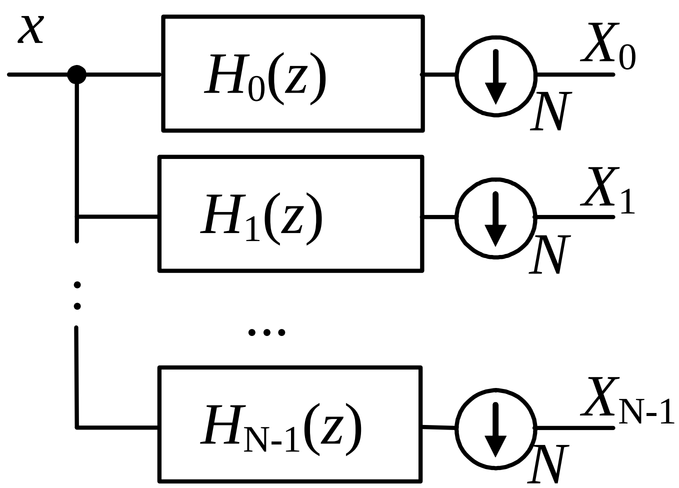
DFT filtarski slog



- Svaki filtar daje po jedan DFT koeficijent u svakom trenutku vremena.
- Sve filtre skupimo u filtarski slog. Dobili smo realizaciju DFT$_N$ na pomičnom otvoru: korak po korak DFT$_N$.

DFT$_N$ filtarski slog s decimacijom

- Ukoliko zadržimo samo svaki *N*-ti uzorak rezultata i odbacimo sve ostale, dobili smo realizaciju DFT$_N$ blok po blok:



- Odbacivanje uzoraka (signala, spektra, …) se naziva decimacija (odgovarajući simbol na slici).

Inverzna DFT

- Iz n DFT koeficijenata $X_0, \ldots, X_{N-1}$ otprije znamo rekonstruirati n uzoraka signala x:

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N^{-1\cdot 1} & \cdots & W_N^{-1\cdot(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{-(N-1)\cdot 1} & \cdots & W_N^{-(N-1)\cdot(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix}$$

- Doprinos koeficijenta X_k svakom pojedinom uzorku $x(n)$ možemo očitati iz pripadnog k–tog stupca matrice DFT_N^{-1}.

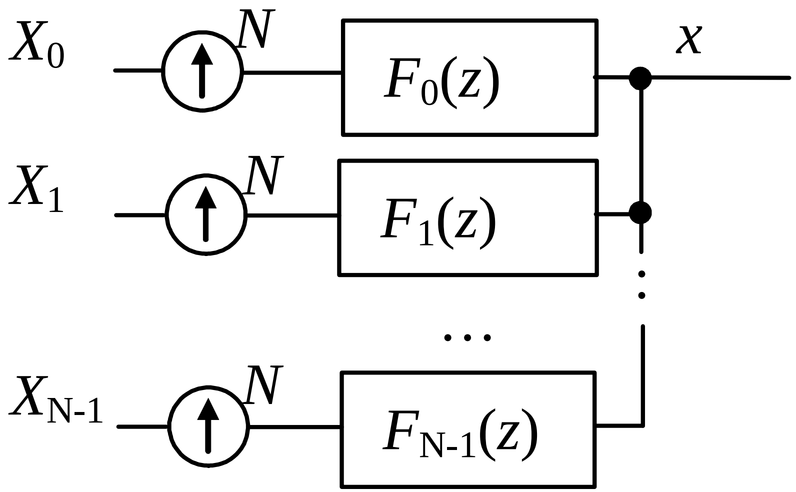
Inverzna DFT$_N$

- To možemo predstaviti slogom filtara na sljedeći način.
- Od svakog uzorka X_k konstruiramo signal trajanja N dodavanjem nula (pretvorimo ga u impuls), te ga propustimo kroz FIR filtar čiji su koeficijenti upravo k-ti stupac matrice DFT$_N^{-1}$:

$$\{X_k, 0, 0, \cdots, 0\} \longrightarrow \boxed{F_k(z) = \frac{1}{N}\left(1 + z^{-1}W_N^{-k\cdot 1} + \ldots + z^{-N+1}W_N^{-k\cdot(N-1)}\right)} \longrightarrow x_k$$

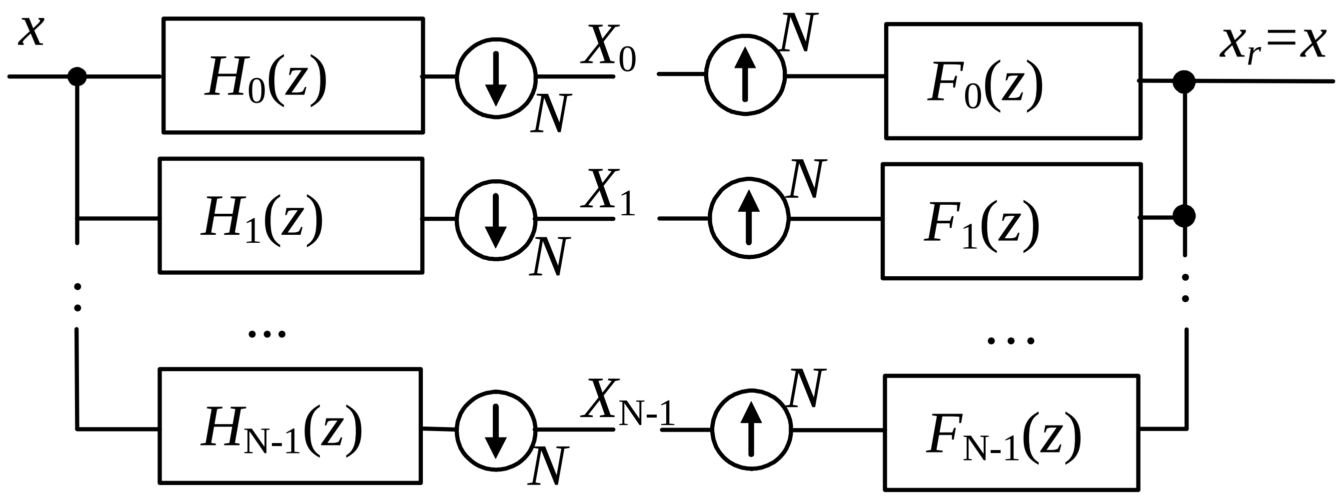
- Blok od N uzoraka signala x rekonstruiramo zbrajanjem svih doprinosa x_k.

Inverzna DFT$_N$ slogom filtara



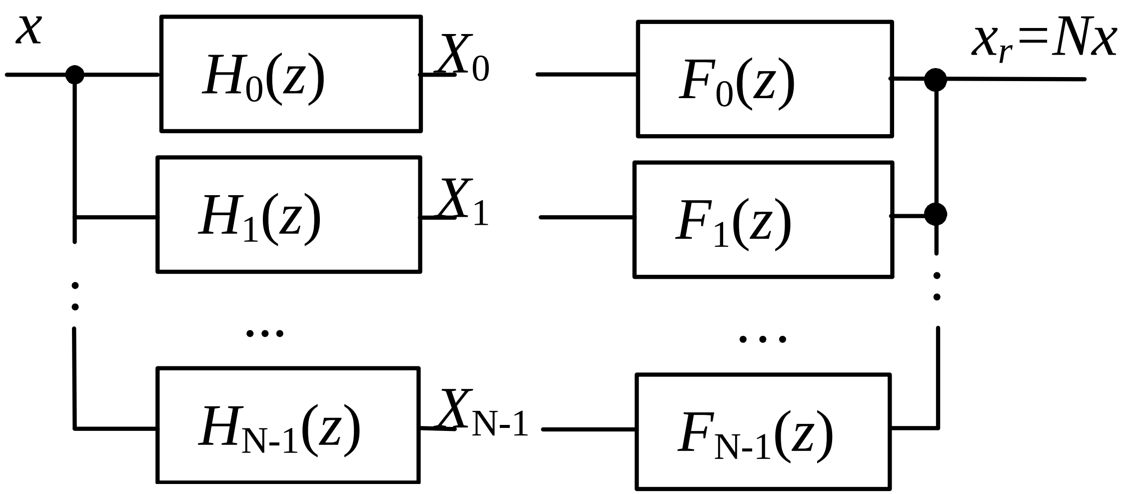
- Umetanje nula između uzoraka (spektra, signala, …) nazivamo ekspanzijom i označavamo na slici odgovarajućim simbolom.

DFT$_N$ filtarski slog s maksimalnom decimacijom



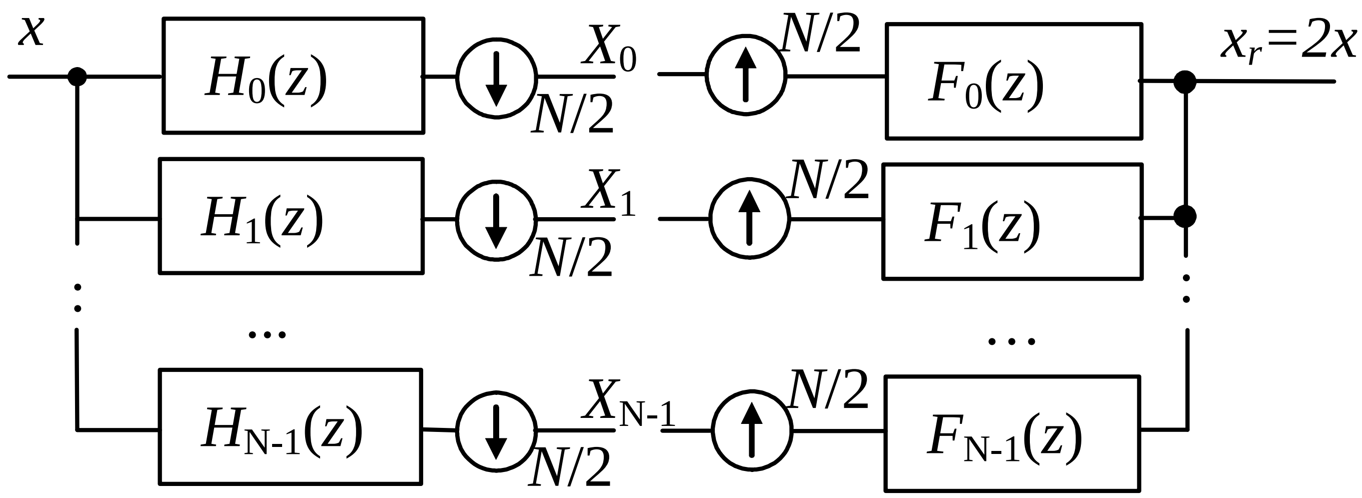
- Ovakav decimirani filtarski slog odgovara blok po blok izračunavanju DFT$_N$.
- Uzorci DFT$_N$ spektra izračunati su za svakih N uzoraka vremena.

DFT$_N$ nedecimirani filtarski slog



- Odgovara računanju DFT$_N$ pomičnim otvorom.
- Uzorci DFT$_N$ spektra izračunavaju se u svakom koraku.
- Rezultat je redundantan. Svaki uzorak rekonstruiranog signala pribrojen je N puta, pa je rezultat N puta uvećan.

DFT$_N$ filtarski slog s decimacijom



- Ovakav decimirani filtarski slog odgovara blok po blok izračunavanju DFT$_N$, uz (polovično) preklapanje blokova.
- Uzorci DFT$_N$ spektra izračunati su za svakih N/2 uzoraka vremena.

Utjecaj vremenskog otvora na spektar signala

- Pitanje je u kojoj mjeri spektar vremenskim otvorom odrezanog signala odgovara spektru originalnog signala?
- x_w se može prikazati kao produkt originalnog signala x i pravokutnog otvora konačnog trajanja, na nekoj lokaciji n:

$$x_{w,n}(k) = x(k) \cdot w(k-n)$$

$$w(k) = \begin{cases} 1, & -N/2 \leq k \leq N/2 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Utjecaj vremenskog otvora

- Množenje u vremenskoj domeni u odgovara konvoluciji u frekvencijskoj domeni.

$$X_{w,n} = X * W_n$$

$$X_{w,n}\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X\left(e^{j\varphi}\right) \cdot W\left(e^{j(\omega-\varphi)}\right) e^{jn(\omega-\varphi)}\, d\varphi$$

- Da bismo vidjeli kakav je utjecaj vremenskog otvora, trebat će nam spektar $W(e^{j\omega})$ tj.
- Fourierova transformacija vremenski diskretnog signala $w(k)$.

Spektar pravokutnog vremenskog otvora

$$W\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{k=-N/2}^{N/2} 1 \cdot e^{-j\omega k} = \left| k' = k + \frac{N}{2} \right| = \sum_{k'=0}^{N} e^{-j\omega\left(k' - \frac{N}{2}\right)} = e^{j\omega\frac{N}{2}} \sum_{k=0}^{N} e^{-j\omega k}$$

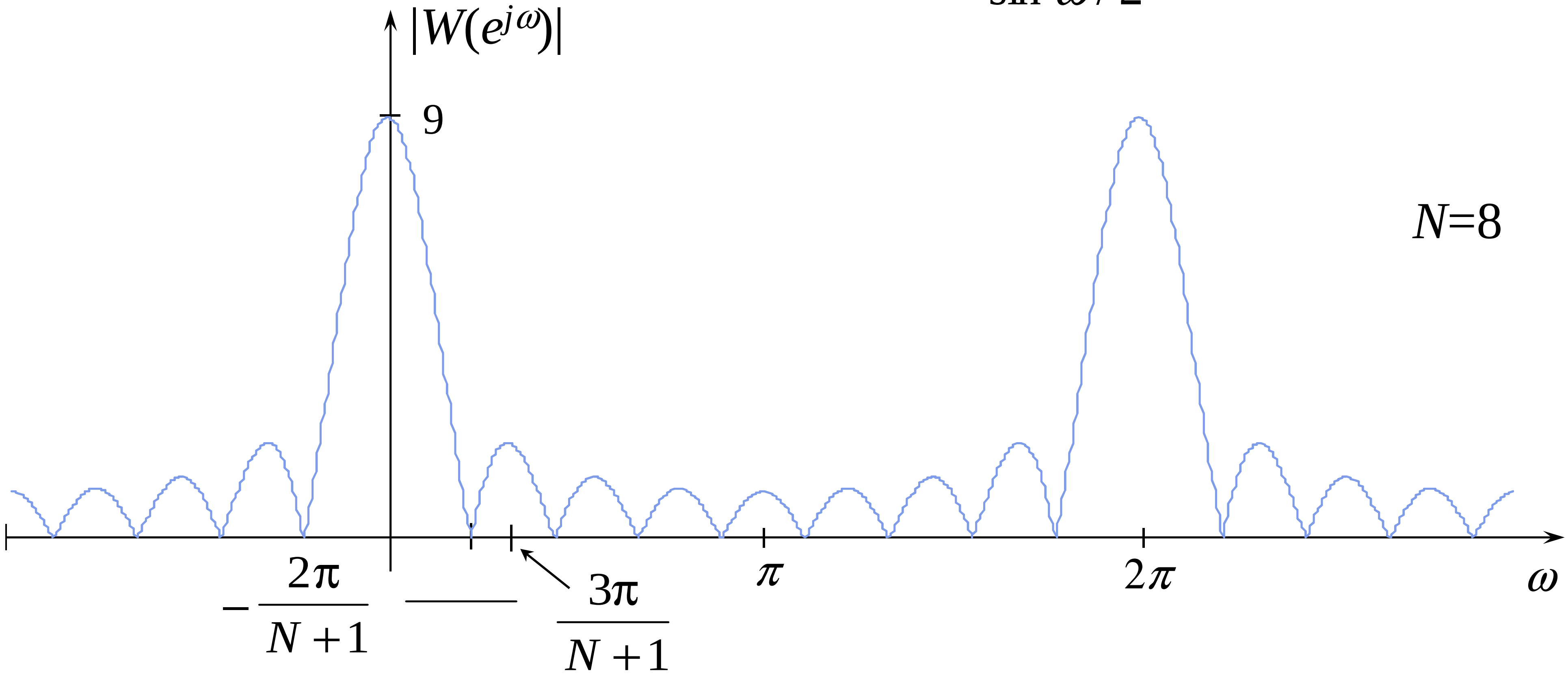
$$= e^{j\omega\frac{N}{2}} \frac{1 - e^{-j\omega(N+1)}}{1 - e^{-j\omega}} = e^{j\omega\frac{N}{2}} \frac{e^{-j\omega\frac{N+1}{2}}\left(e^{+j\omega\frac{N+1}{2}} - e^{-j\omega\frac{N+1}{2}}\right)}{e^{-j\frac{\omega}{2}}\left(e^{+j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}}\right)}$$

$$= \frac{e^{-j\frac{\omega}{2}}}{e^{-j\frac{\omega}{2}}} \frac{2j\sin\left(\omega\frac{N+1}{2}\right)}{2j\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} = \frac{\sin\left(N+1\right)\frac{\omega}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}$$

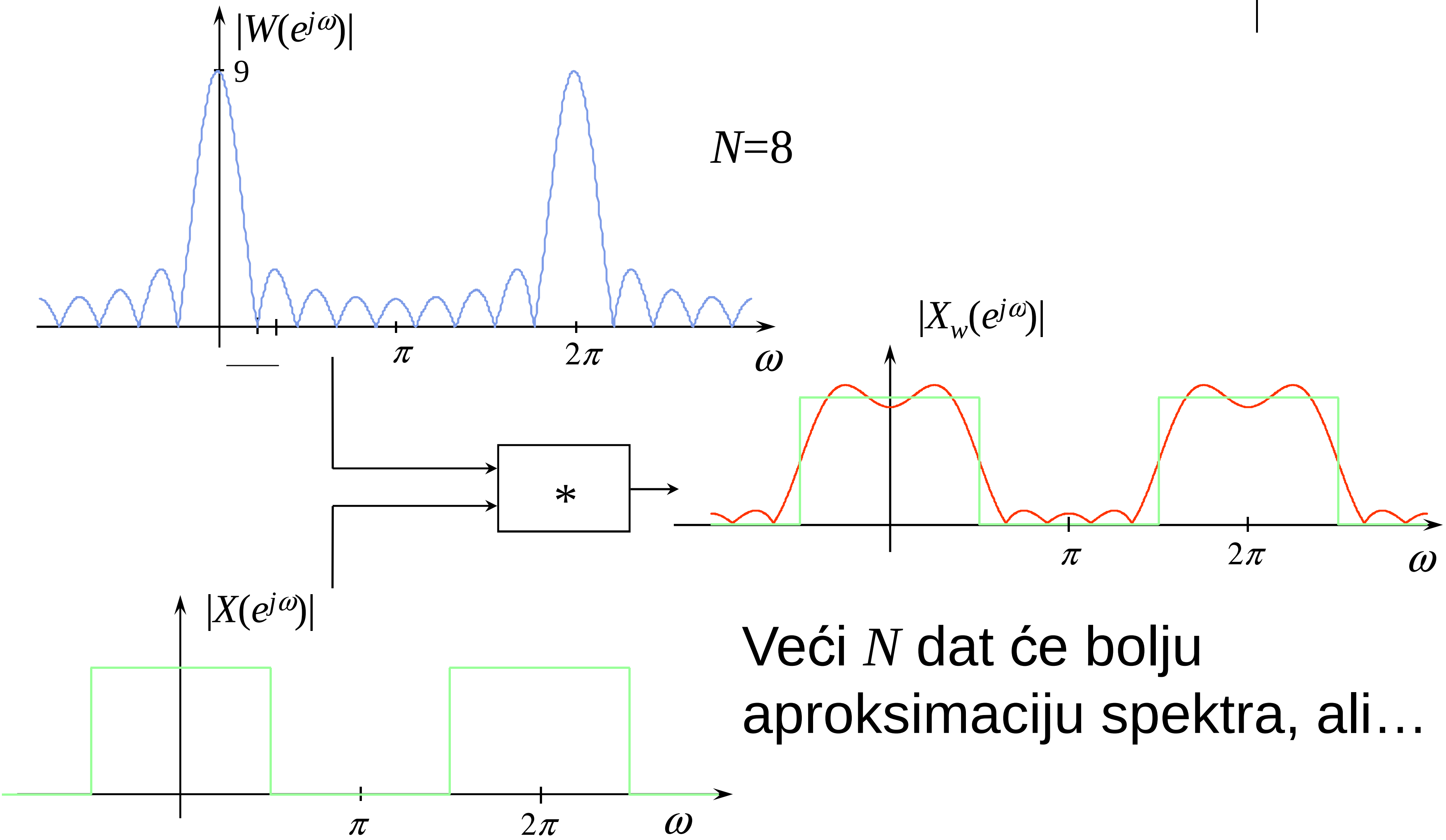
Spektar pravokutnog vremenskog otvora

Fourierova transformacija vremenskog otvora $w(k)$ je

$$W\left(e^{j\omega}\right) = \frac{\sin \omega\left(N+1\right)/2}{\sin \omega/2}$$

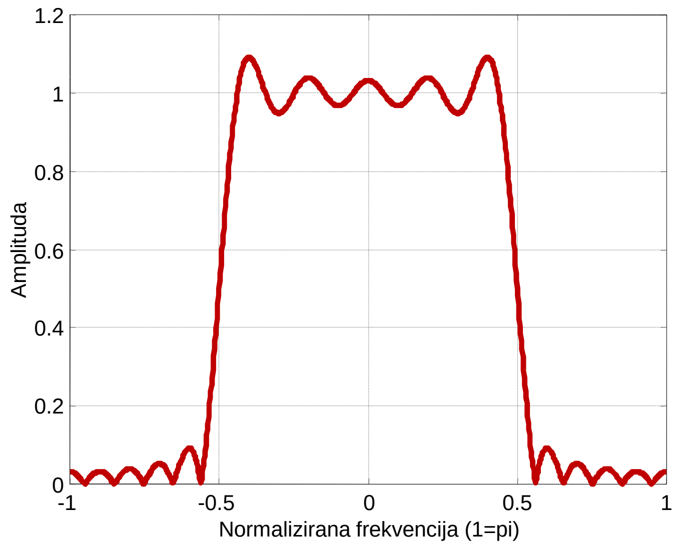


Utjecaj vremenskog otvora na amplitudu spektra

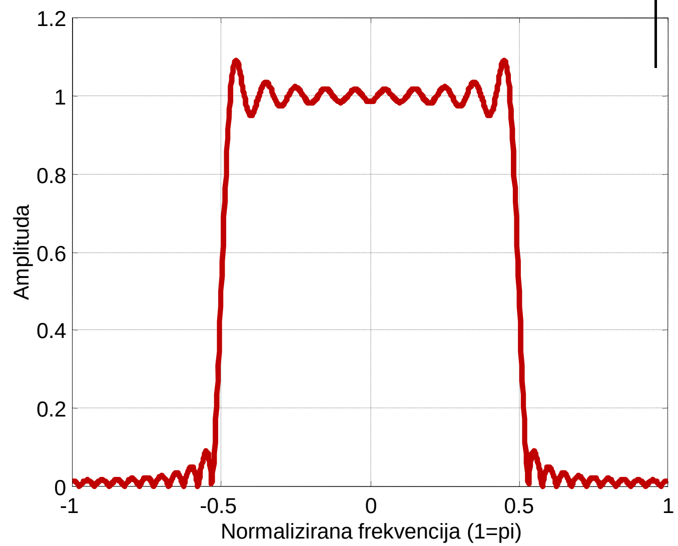


Veći N dat će bolju aproksimaciju spektra, ali…

Gibbsov fenomen...



N=20



N=40

- Za velike N-ove valovitost u blizini brida spektra originalnog signala ne opada, već ostaje konstantna (Gibbsov fenomen)!
- Stoga se osim pravokutnog koriste i drugi vremenski otvori (o tome kasnije).

Utjecaj diskretizacije spektra

- Računavši DFT na svakom pomaknutom otvoru (blok po blok, korak po korak, …) mi smo izračunali uzorke spektra na diskretnim frekvencijama.
- Diskretni spektri odgovaraju spektrima periodički proširenih signala.
- Periodičko proširenje je na svakoj poziciji otvora drugačije.
- Utjecaj periodičkog proširenja se može umanjiti pogodnim izborom vremenskog otvora (o tome kasnije…).

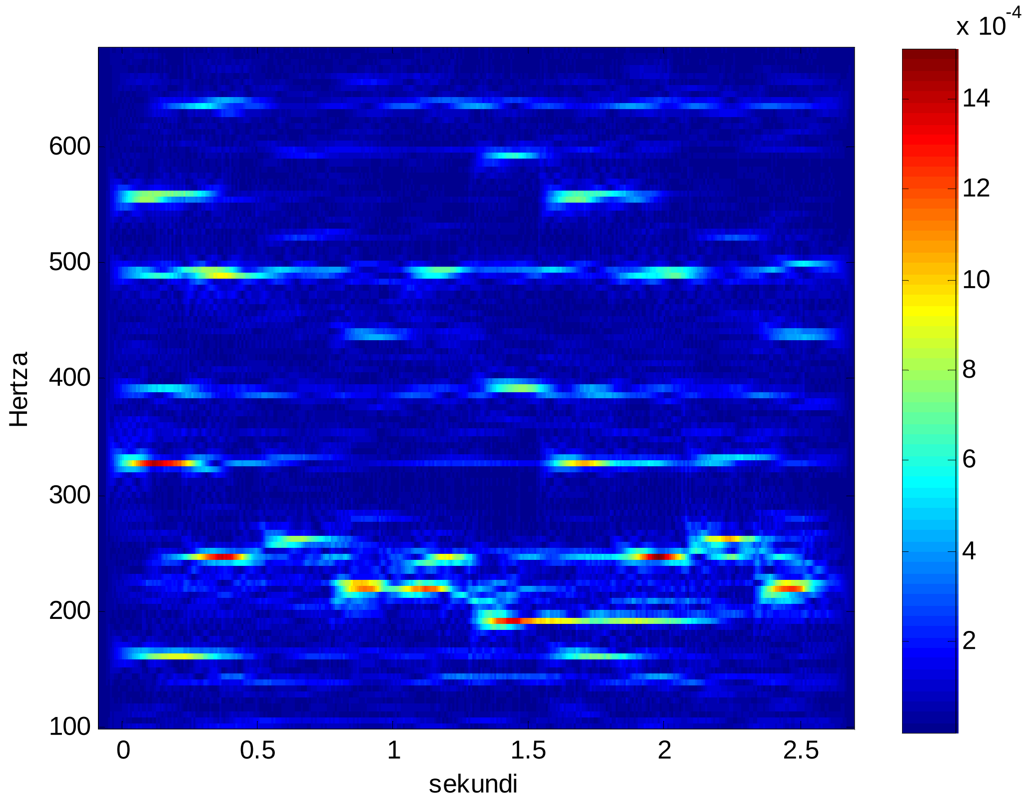
Spektar snage i spektrogram

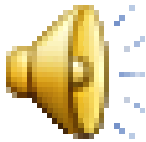
- Spektar snage:

$$\left|X_{w,n}\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 = X^*_{w,n}\left(e^{j\omega}\right) \cdot X_{w,n}\left(e^{j\omega}\right)$$

- Spektar snage signala je realan, nenegativan, za realne signale paran.
- Računamo li spektar blok po blok, ili korak po korak korištenjem vremenskog otvora, dobivamo procjenu spektra snage signala s dimenzijom vremena: spektrogram.
- DFT spektrogram: $\left|X_{w,n}(k)\right|^2$

Spektrogram, primjer





- Zvuk gitare

Brza DFT$_N$

- Broj operacija potrebnih za direktnu implementaciju DFT$_N$ je reda veličine N^2 kompleksnih operacija - oznaka O(N^2).
- Algoritmi čija računska složenost raste s kvadratom duljine signala nisu najpogodniji za realizaciju.
- Pitanje: možemo li DFT$_N$ izračunati s manjim brojem računskih operacija?

Brza Fourierova transformacija

- FFT postupci se temelje na razlaganju N uzoraka niza u više grupa uzoraka, a koristi se periodičnost i simetrija e^{jx}.
- Sumu za $X(n)$ razložimo u dvije, po parnim i neparnim uzorcima:

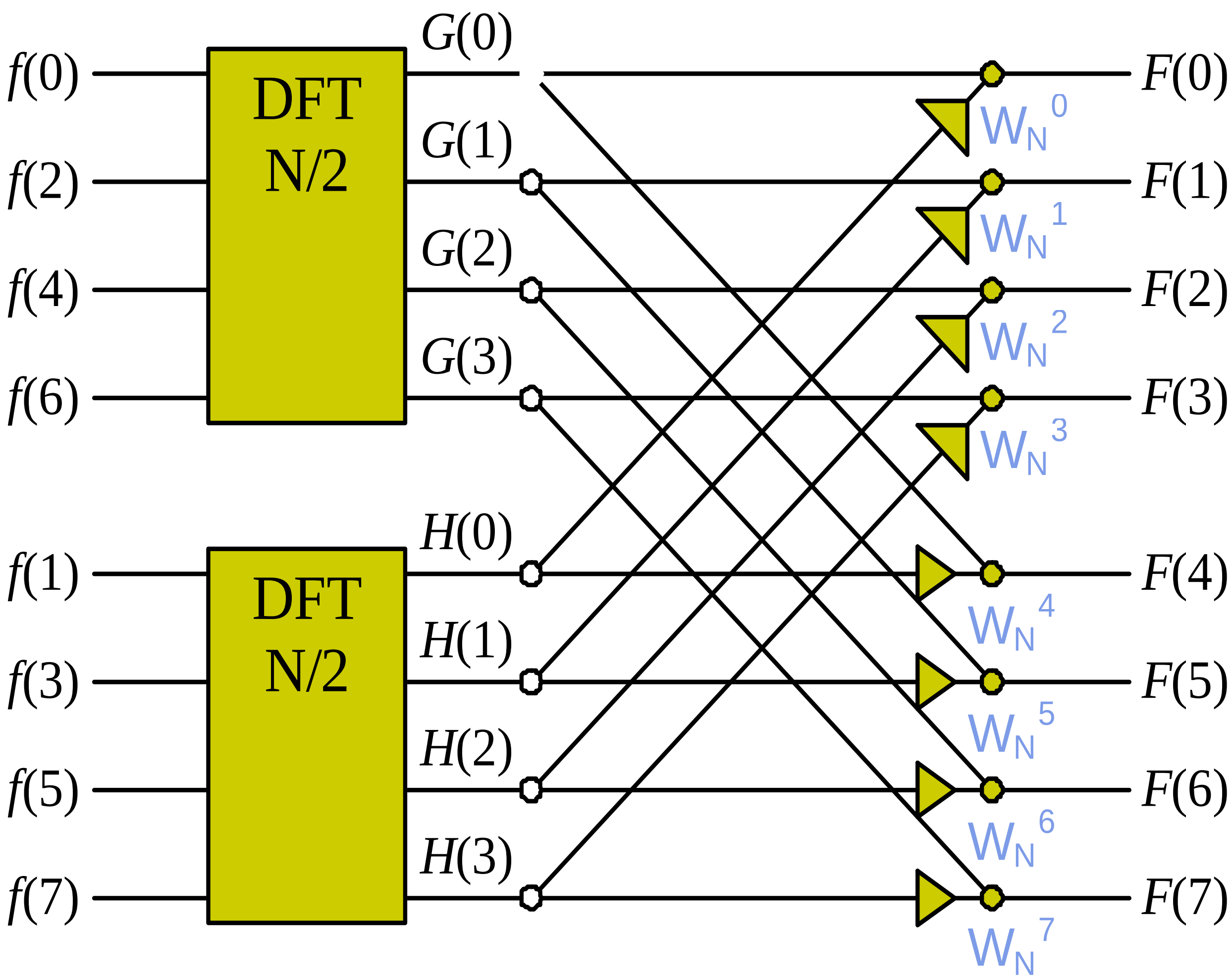
$$X(n) = \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r) e^{-j\frac{2\pi n 2r}{N}} + \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r+1) e^{-j\frac{2\pi n(2r+1)}{N}} =$$

$$= \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r) e^{-j\frac{2\pi nr}{N/2}} + e^{-j\frac{2\pi n}{N}} \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r+1) e^{-j\frac{2\pi nr}{N/2}}$$

$$X(n) = G(n) + e^{-j\frac{2\pi n}{N}} H(n) \qquad \mathrm{W}_N^{2r} = \mathrm{W}_{N/2}^{r}$$

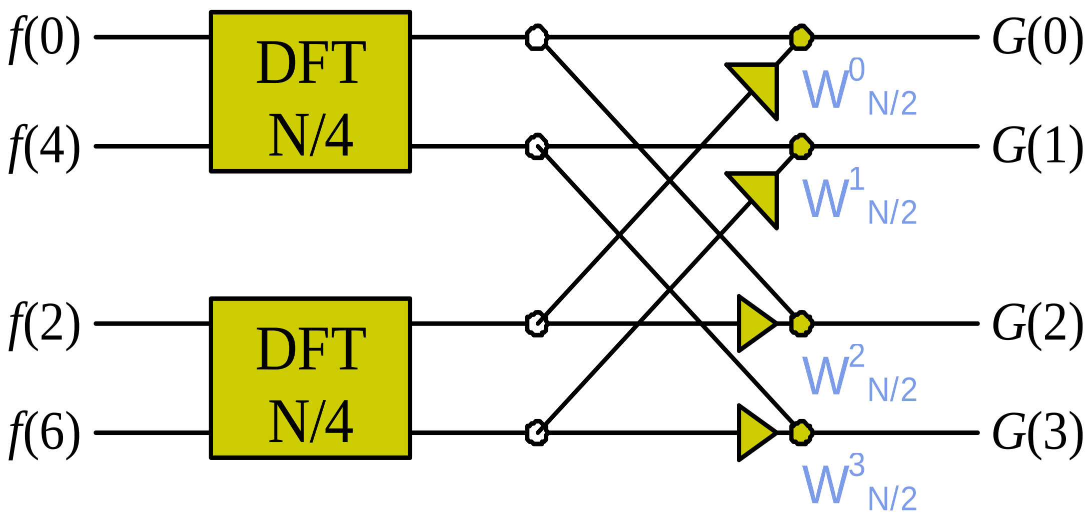
$G(n)$, $H(n)$ su $\mathrm{DFT}_{N/2}$ od $N/2$ parnih i neparnih uzoraka.

Blok dijagram za N = 8



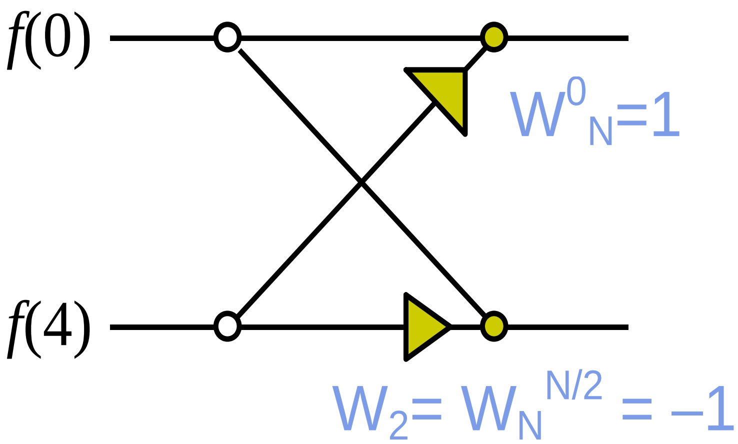
Brza Fourierova transformacija

- Dvije transformacije po $N/2$ uzoraka traže $2(N/2)^2$, odnosno $N^2/2$ operacija.
- Trebat će nam još N zbrajanja i množenja za ukupan rezultat, ali ušteda je veća!
- Ako je $N/2$ i dalje paran broj možemo i $DFT_{N/2}$ odrediti s nove dvije $DFT_{N/4}$ s $N/4$ uzoraka:



DFT leptir

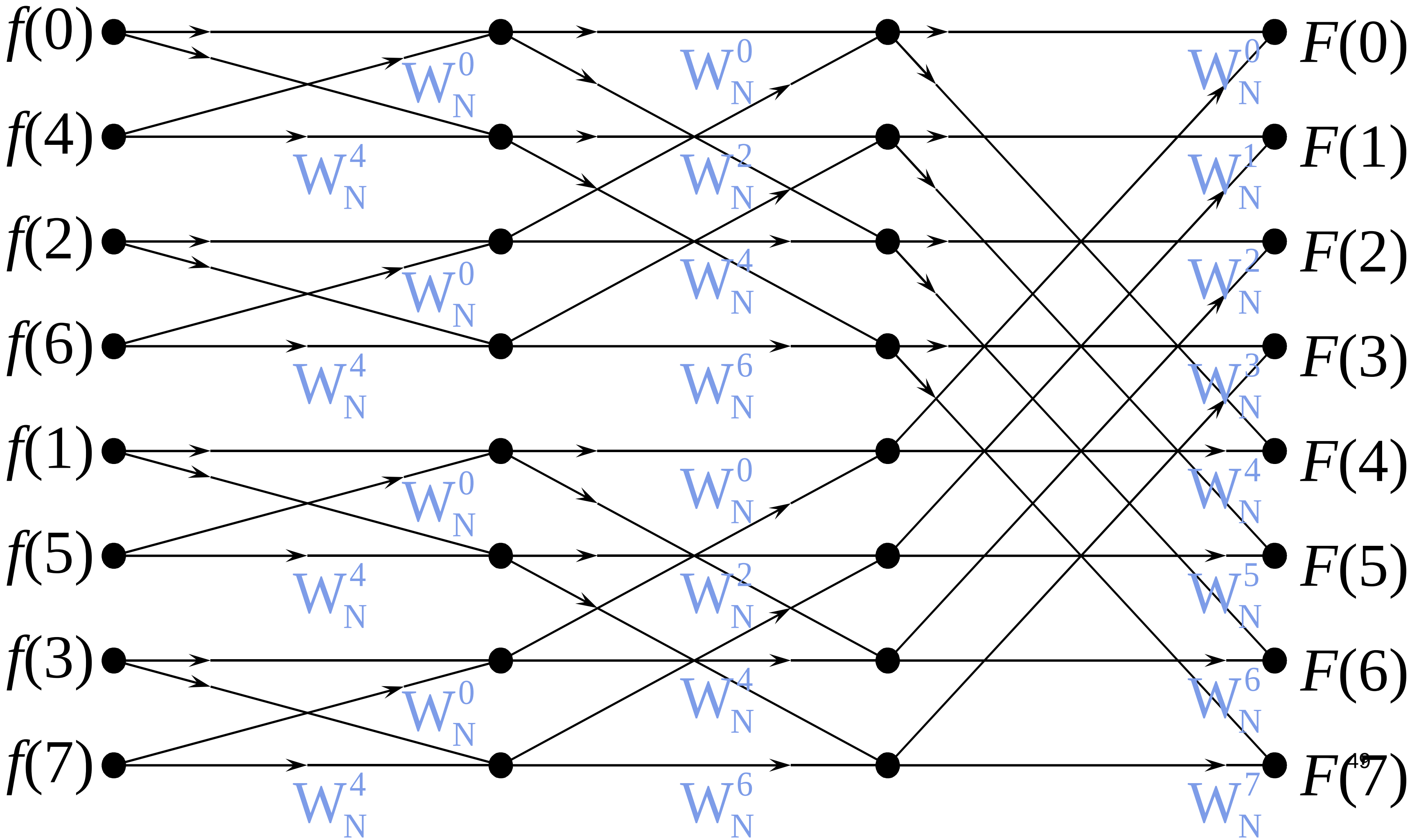
- Na kraju dolazimo na DFT_2 od dva uzorka:



- Ova struktura se naziva DFT leptir.

Blok dijagram FFT za N = 8

$$m_{FFT} = N\log_2 N = 8 * 3 = 24,\ m_{DFT} = N^2 = 64$$



Brza Fourierova transformacija

- U općem slučaju s $N = 2^q$ za svođenje na DFT od svega dva uzorka trebat će za postupak provesti za ukupno q–stupnjeva.
- Kako u svakom stupnju imamo N množenja ukupan broj množenja m iznosi $N \log_2 N$.
- To je značajna ušteda !
- Npr. N=1024, $m_{\mathrm{FFT}} = N\log_2 N = 1024 \cdot 10 = 10240$, $m_{\mathrm{DFT}} = N^2 = 1048576$.
- Ukoliko N nije potencija broja 2, signal se može nadopuniti nulama.

Odradili smo teme:

- Fourierova transformacija: 4 varijante
- Matrica diskretne Fourierove transformacije (DFT matrica)
- DFT filtarski slog
- Brza Fourierova transformacija (FFT)