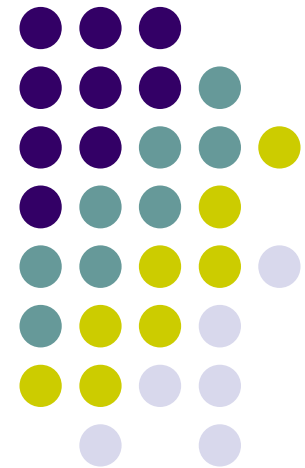


# Digitalna obrada signala

Obrada informacija

Damir Seršić

<http://www.fer.unizg.hr/predmet/obrinf>





# Teme predavanja

- Reprezentacija signala i sustava
- Osnovne podjele i osnovni signali
- Linearni sustavi, impulsni odziv i konvolucija
- Dekonvolucija
- Z transformacija, prijenosna funkcija, frekvencijska karakteristika
- Sustavi s beskonačnim (IIR) i konačnim (FIR) impulsnim odzivom
- Grupno kašnjenje, linearna faza
- Tipovi FIR filtara s linearnom fazom



# Reprezentacija signala

- *Signal* je fenomen koji nosi neku informaciju.
- Obično to je varijacija neke fizikalne veličine.
- Moguće ju je izmjeriti, manipulirati, pohraniti, prenijeti ili obraditi nekim fizikalnim procesom: *sustavom*.
- Signal: veza nezavisne i zavisne varijable

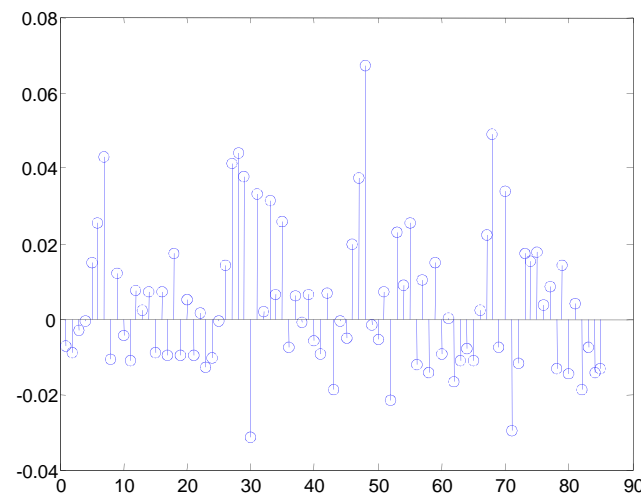
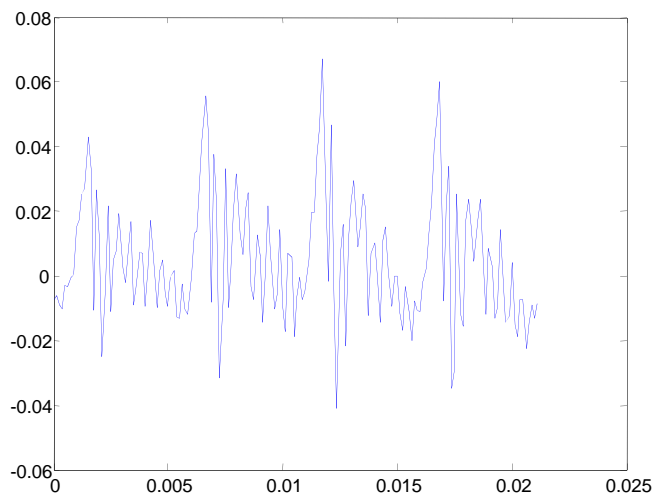
$$x = \{(t, x) \mid t \in D, x \in K\}$$

- D: domena; K: kodomena.



# Osnovne podjele

- Svojstva nezavisne varijable klasificiraju signale kao *kontinuirane* ili *diskretne*.



- D: neprekinut i neprebrojiv skup.

$$D \subseteq \mathbb{R}$$

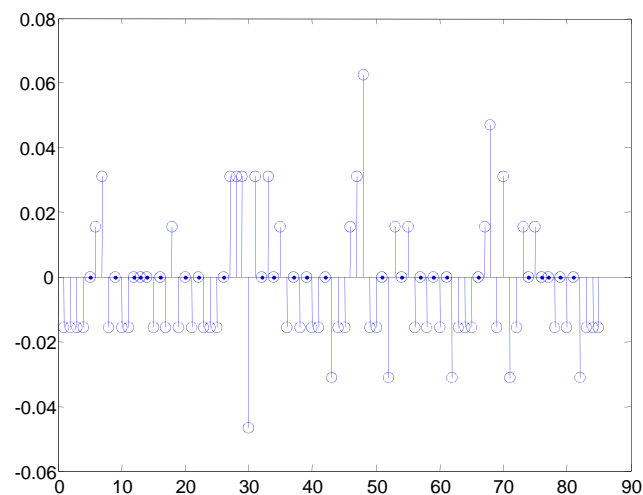
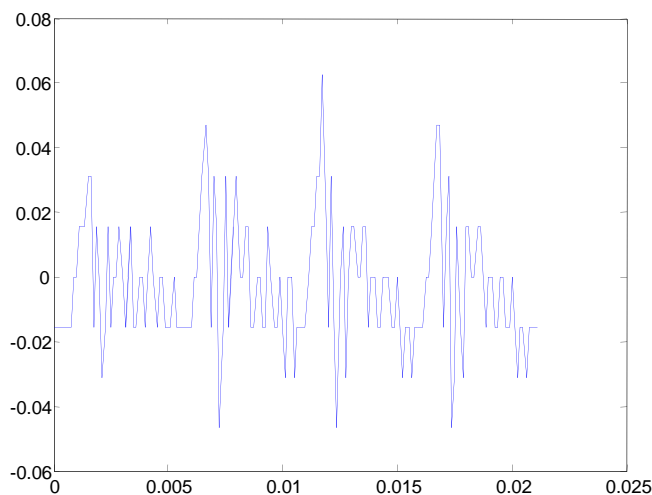
- D: prebrojiv skup.  
 $x = \{(k, x) \mid k \in D, x \in K\}$

$$D \subseteq \mathbb{Z}$$



# Osnovne podjele

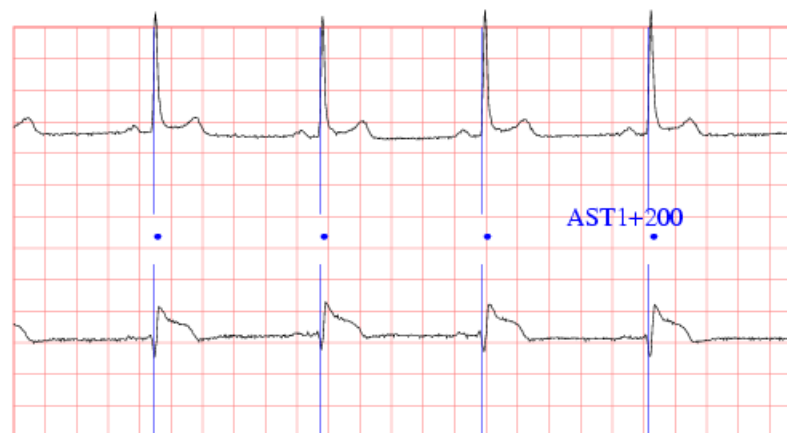
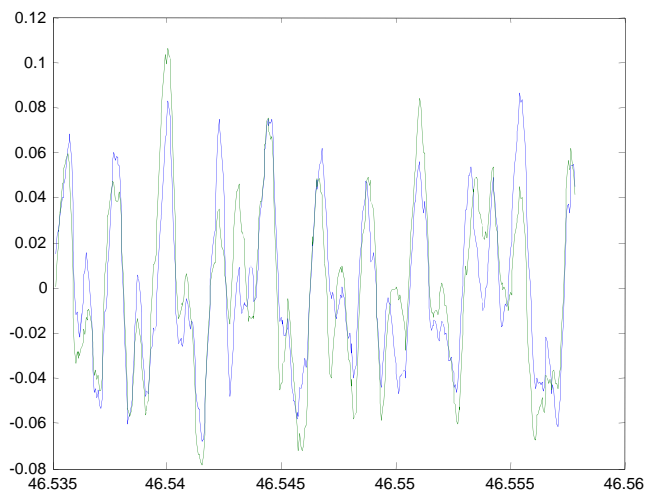
- Ako je kodomena  $K$  prebrojiv konačan skup, onda govorimo o kvantiziranom signalu.
- Diskretan i kvantiziran  $\rightarrow$  *digitalan*.
- Kontinuiran i nekvantiziran  $\rightarrow$  *analogan*.





# Vektorski signali

- Kada mjerenu veličinu karakterizira *skup signala*, možemo govoriti o *vektorskom signalu*.
- Stereo ili višekanalni audio, EEG, EKG, signali dobiveni redom antena ili senzora...





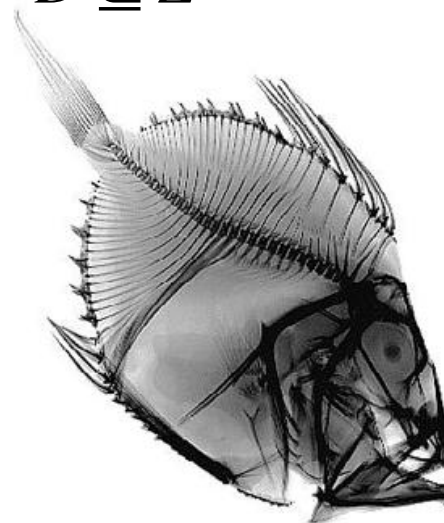
# Višedimenzionalni signali

- Domena može biti dvodimenzionalan skup:

$$D \subseteq R \times R \quad D \subseteq Z \times Z$$

- ili općenito višedimenzionalan:

$$D \subseteq R^N \quad D \subseteq Z^N$$



- Primjeri 2D signala.

# Višedimenzionalni vektorski signali



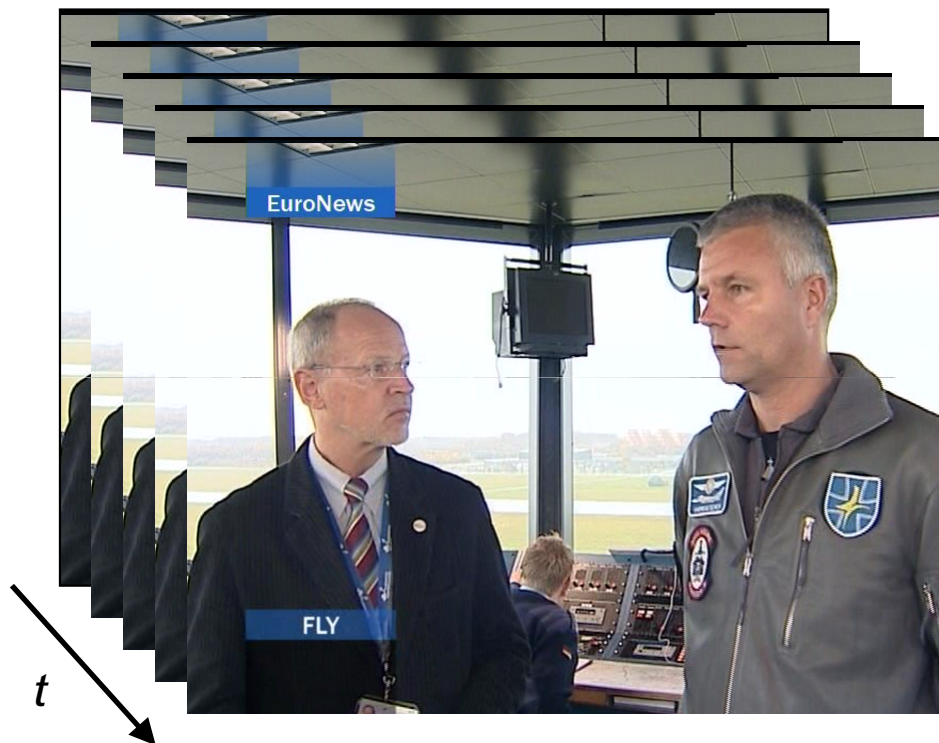
- Domena je višedimenzionalan skup.
- Kodomena je vektor.
- Primjer: fotografija u boji (2D  $\rightarrow$  RGB).







# Primjeri 3D signala

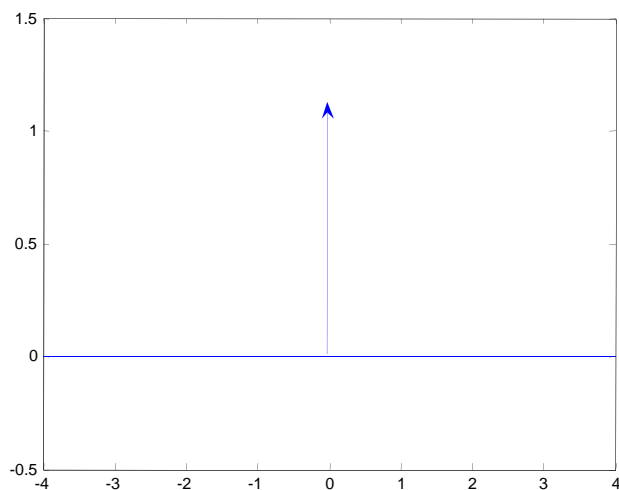


- fMRI snimka (3D), video snimka (2D + vrijeme: 2½D)

# Osnovni signali



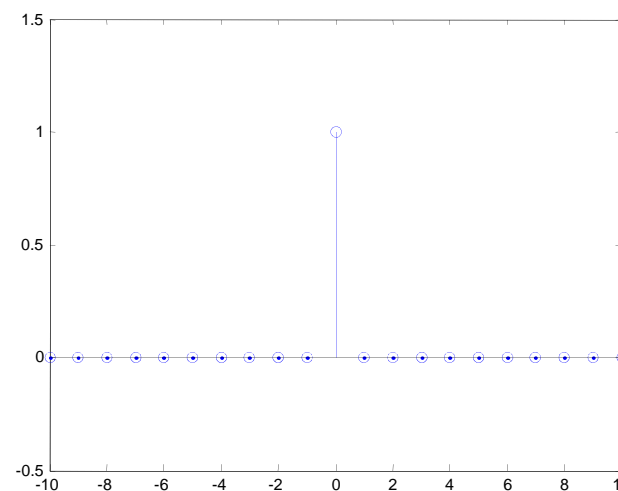
- Jedinični impuls



- Dirac delta

$$\delta(t) = 0, \quad t \neq 0 \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - \tau) dt = f(\tau)$$



- Kroenecker delta

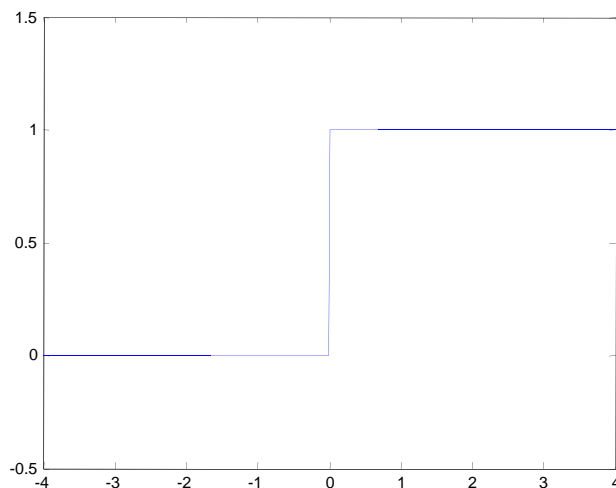
$$\delta(k) = 0, \quad k \neq 0; \quad \delta(0) = 1$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \delta(k) = 1; \quad \sum_{-\infty}^{\infty} f(k) \delta(k - n) = f(n)$$

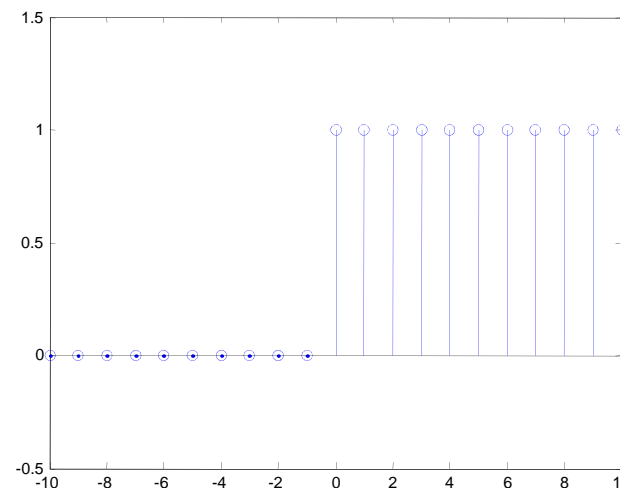


# Osnovni signali

- Jedinična stepenica



$$\mu(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1/2, & t = 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases}$$



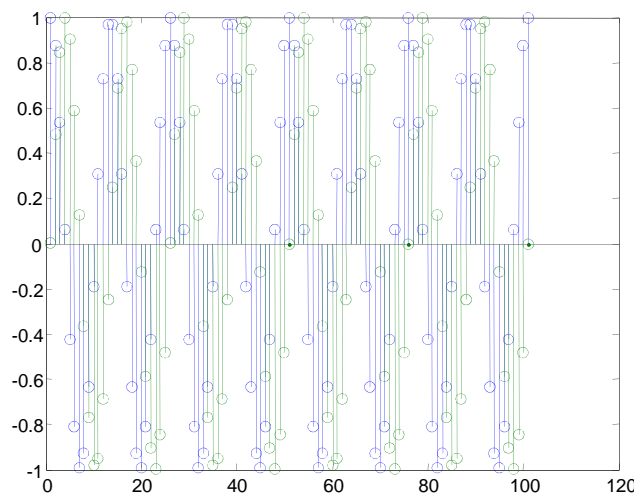
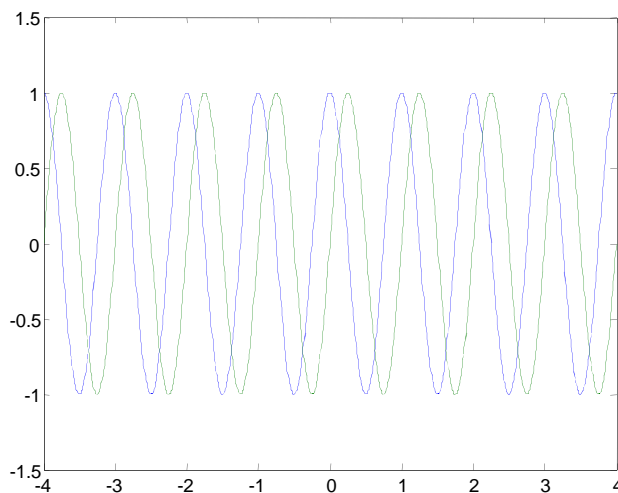
$$\mu(k) = \begin{cases} 0, & k < 0, \\ 1, & k \geq 0. \end{cases}$$

- Signal je kauzalan ako vrijedi  $x(k)=0$  za  $k < 0$ .
- Množenje signala s  $\mu(k)$  čini ga kauzalnim.



# Osnovni signali

- Kompleksna harmonijska funkcija

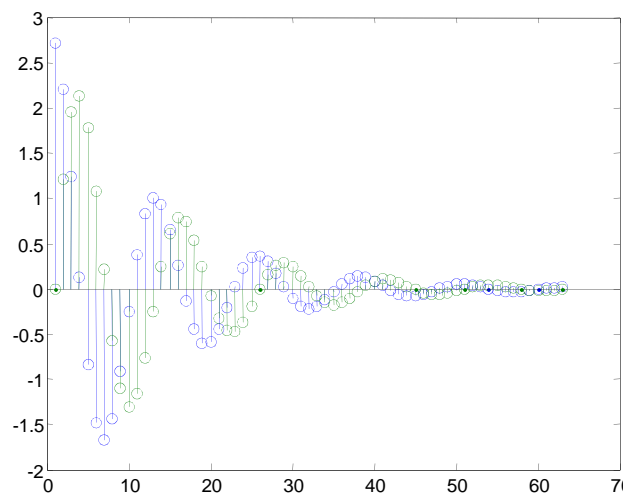
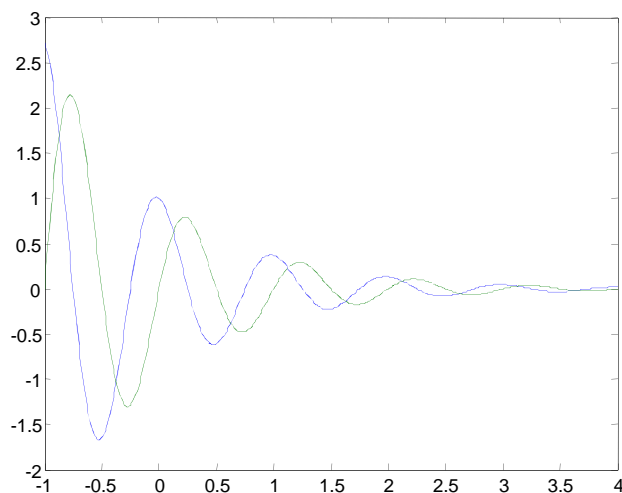


- Kontinuirana  $x(t)=e^{j(\omega t+\theta)}$ , diskretna  $x(k)=e^{j(\Omega k+\theta)}$ .
- Sinusoidalni (harmonijski) signali neophodni za frekvencijsku analizu linearnih sustava.



# Osnovni signali

- Kompleksna eksponencijala



- Kontinuirana  $x(t)=e^{(\sigma+j\omega) t}$ , diskretna  $x(k)=(\rho e^{j\Omega})^k$ .
- Potrebni za potpun uvid u vladanje i svojstva linearnih sustava.



# Linearni sustav

- Sustav: veza ulaznog i izlaznog signala

$$\{(u, y) \mid u \in U, y \in Y\}$$

- U: prostor (skup) ulaznih signala;  
Y: prostor izlaznih signala.

- Preslikavanje određuje operator  $f : u \mapsto y$

- Sustav je linearan ako za  $f$  vrijedi:

$$f(a \cdot u) = a \cdot f(u),$$

$$f(u + v) = f(u) + f(v).$$



# Primjeri linearnih sustava

- Bezmemorijski: pojačalo ili atenuator  $y = A \cdot u$ .
- Memorijski kontinuiran: diferencijalna jednačba

$$y^{(N)} + a_{N-1}y^{(N-1)} + \dots + a_2y'' + a_1y' + a_0y = \\ b_Mu^{(M)} + b_{M-1}u^{(M-1)} + \dots + b_2u'' + b_1u' + b_0u$$

- Memorijski diskretan: jednačba diferencija

$$y(k) + a_1y(k-1) + \dots + a_{N-1}y(k-N+1) + a_Ny(k-N) = \\ b_0u(k) + b_1u(k-1) + \dots + b_Mu(k-M)$$

- U oba primjera memorijski linearni sustavi su ujedno i vremenski stalni (nepromjenjivi).

# Impulsni odziv linearnog sustava



- Neka je  $h$  odziv mirnog linearnog sustava na jedinični impuls (*miran*  $\leftrightarrow$  početni uvjeti = 0).

$$f : \delta \mapsto h$$

- Tada  $h$  nazivamo **impulsnim odzivom** sustava.
- Opći signal  $u$  možemo razložiti na jedinične impulse:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \quad u(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} u(k) \delta(n - k)$$





# Odziv linearnog sustava

- Neka je  $y$  odziv mirnog linearnog sustava na opću pobudu  $u$ :  $f : u \mapsto y$

$$y(t) = f \left[ \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \right] \quad y(n) = f \left[ \sum_{-\infty}^{\infty} u(k) \delta(n - k) \right]$$

- Kako je  $f$  linearan operator, možemo zapisati:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) f[\delta(t - \tau)] d\tau \quad y(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} u(k) f[\delta(n - k)]$$

- Prepoznamo impulsni odziv sustava:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) h(t, \tau) d\tau \quad y(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} u(k) h(n, k)$$



# Konvolucija

- Ako je sustav vremenski stalan, pomaknuta pobuda daje isti odziv, također pomaknut:

$$f[\delta(t - \tau)] = h(t - \tau) \qquad f[\delta(k - n)] = h(k - n)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) h(t - \tau) d\tau \qquad y(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} u(k) h(n - k)$$

- Dobivene izraze nazivamo *konvolucijom*.
- Koristit ćemo ih vrlo često. Kraća oznaka:

$$y = u * h = h * u$$



# Kauzalan sustav

- Linearan vremenski stalan (LVS, LTI) sustav je kauzalan ako se ne odaziva prije nego što je pristigla pobuda.
- Matematički izražen uvjet kauzalnosti glasi:
- $y(t) = 0$  za  $t < t_0$  ako je  $x(t) = 0$  za  $t < t_0$ ,
- Za LVS sustav slijedi:  $h(t) = 0$  za  $t < 0$ , tj. impulsni odziv kauzalnog sustava jest kauzalan signal.
- Za kauzalne signale i sustave izrazi za konvoluciju imaju konačne granice:

$$y(t) = \int_{\tau=0}^t u(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad y(n) = \sum_{k=0}^n u(k) h(n - k)$$



# Stabilan sustav

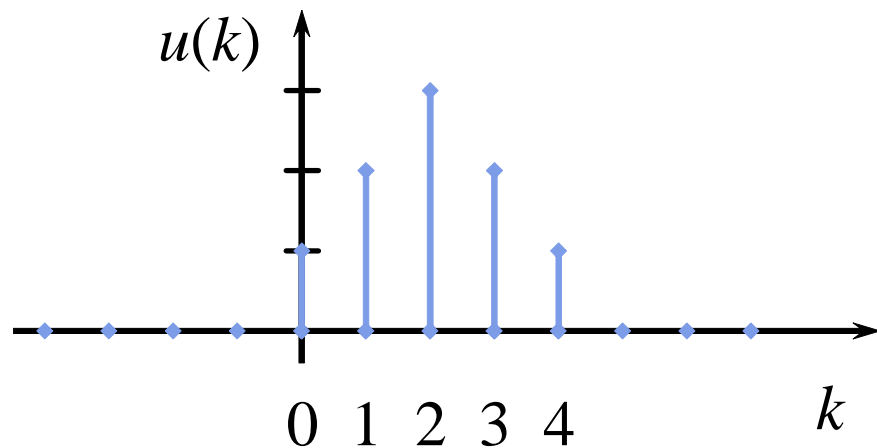
- Sustav je BIBO stabilan ako je odziv na bilo koju ograničenu pobudu ograničen:

$$|x(t)| < M \rightarrow |y(t)| < M \cdot I \text{ (M i I su konstante).}$$

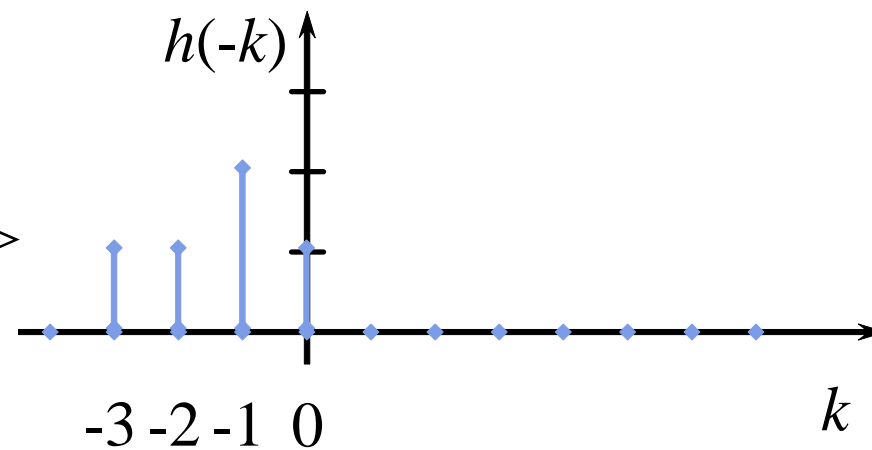
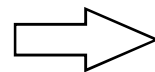
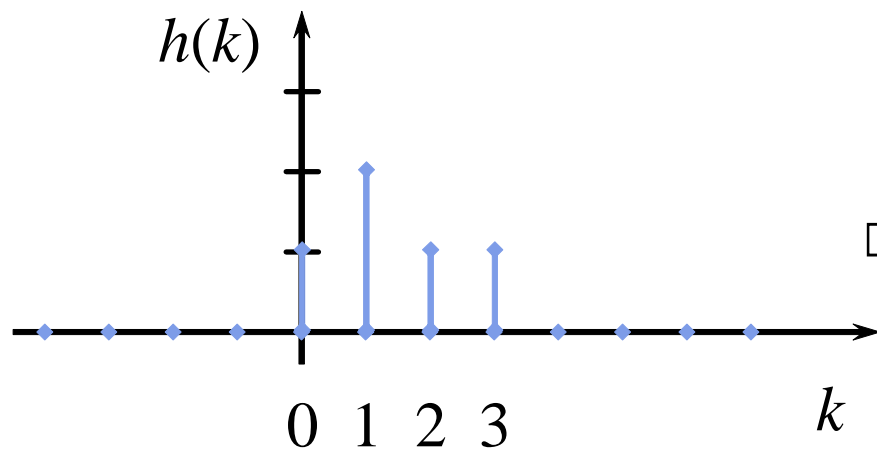
- Za LVS sustav slijedi:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < \infty.$$

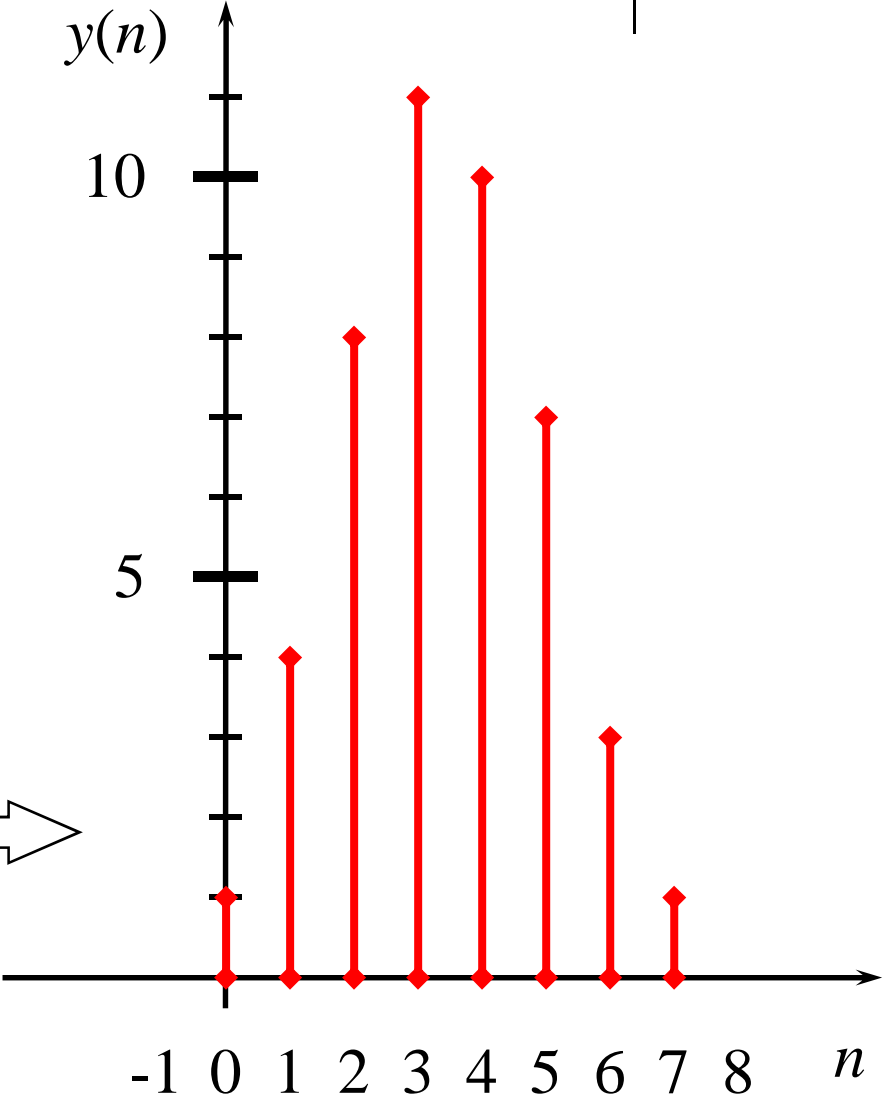
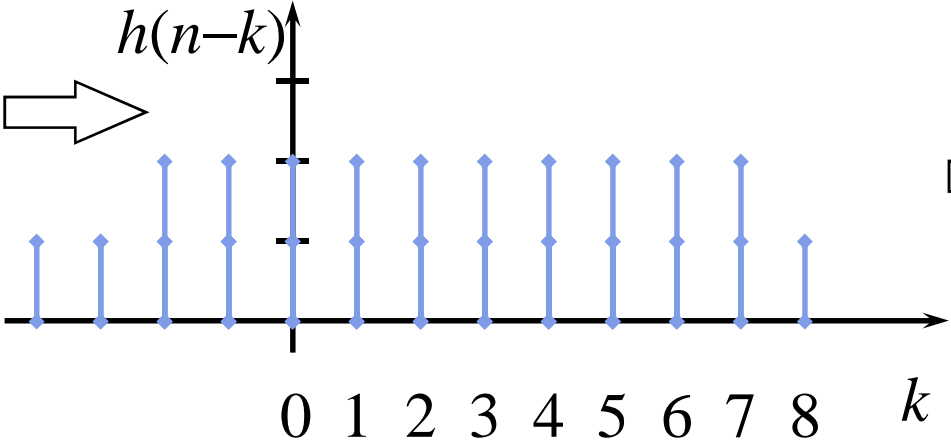
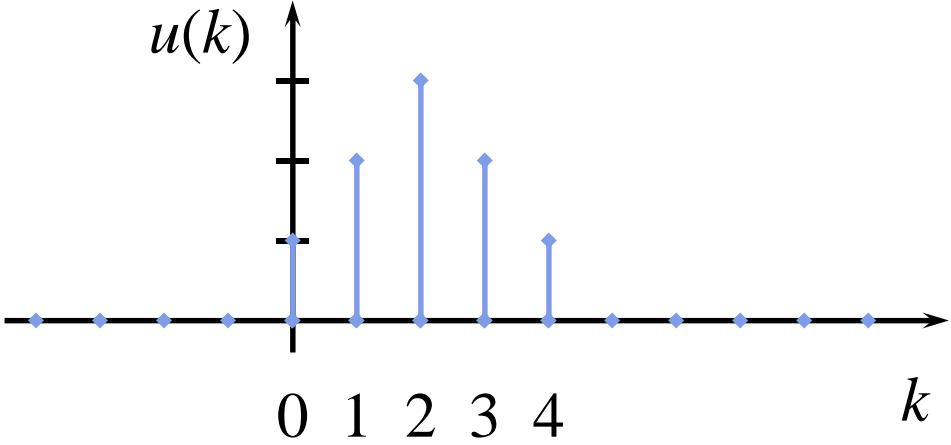
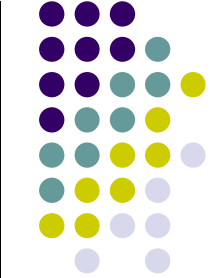
# Konvolucija, primjer 1



$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u(k)h(n-k)$$



# Konvolucija, primjer 1



# Matrična reprezentacija konvolucije



$$\begin{aligned}y_0 &= h_0 u_0 \\y_1 &= h_0 u_1 + h_1 u_0 \\y_2 &= h_0 u_2 + h_1 u_1 + h_2 u_0 \\y_3 &= h_0 u_3 + h_1 u_2 + h_2 u_1 + h_3 u_0 \\y_4 &= h_0 u_4 + h_1 u_3 + h_2 u_2 + h_3 u_1 \\y_5 &= \quad h_1 u_4 + h_2 u_3 + h_3 u_2 \\y_6 &= \quad \quad h_2 u_4 + h_3 u_3 \\y_7 &= \quad \quad \quad h_3 u_4\end{aligned}$$

# Matrična reprezentacija konvolucije



$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & h_0 & 0 & 0 & 0 \\ h_2 & h_1 & h_0 & 0 & 0 \\ h_3 & h_2 & h_1 & h_0 & 0 \\ 0 & h_3 & h_2 & h_1 & h_0 \\ 0 & 0 & h_3 & h_2 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & h_3 & h_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{u}$$



# Dekonvolucija



- Važna zadaća digitalne obrade signala je **rekonstrukcija** ulaznog signala iz izlaznog.
- Postupak se naziva **dekonvolucija**.
- Utjecaj mjerne opreme nije moguće ukloniti, ali je moguće napraviti rekonstrukciju fMRI ili CT ili UZV signala ili pak slike udaljene galaksije.
- U komunikacijama je osobito važno uklanjanje utjecaja komunikacijskog kanala – bez toga nema velikih brzina prijenosa!

# Dekonvolucija



- Postupak dobivanja nepoznate pobude  $u(n)$ , ako je poznat odziv sustava  $y(n)$ .
- Izraz za konvoluciju je:

$$\begin{aligned}y(n) &= \sum_{k=0}^n u(n-k)h(k) \\ &= u(n)h(0) + \sum_{k=1}^n u(n-k)h(k),\end{aligned}$$

- što vodi na jednostavnu rekurzivnu formulu.



# Dekonvolucija

$$u(n) = \left[ y(n) - \sum_{k=1}^n u(n-k)h(k) \right] \frac{1}{h(0)}$$

- Dekonvolucija se koristi za uklanjanje poznatog utjecaja mjernog sustava.
- Poznat je impulsni odziv mjernog sustava.
- Za restauraciju uzorka  $u(n)$  koriste se svi prethodni uzorci  $u(0), u(1), \dots, u(n-1)$ .
- U izračunu se može javiti numerička nestabilnost.



# Primjer 1, dekonvolucija

$$y(n) = \{1, 4, 8, 11, 10, 7, 3, 1\} \quad h(n) = \{1, 2, 1, 1\}$$

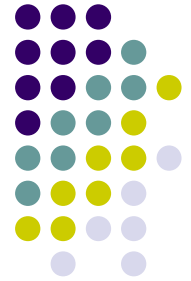
$$u(n) = \left[ y(n) - \sum_{k=1}^n u(n-k)h(k) \right] \frac{1}{h(0)}$$

$$u(0) = y(0) \frac{1}{h(0)} = 1 \frac{1}{1} = 1$$

$$u(1) = [y(1) - u(0)h(1)] \frac{1}{h(0)} = [4 - 1 \cdot 2] \frac{1}{1} = 2$$

$$u(2) = [y(2) - u(1)h(1) - u(0)h(2)] \frac{1}{h(0)} = [8 - 2 \cdot 1 - 1 \cdot 2] \frac{1}{1} = 3$$

# Primjer 1, dekonvolucija



$$u(3) = [y(3) - u(2)h(1) - u(1)h(2) - u(0)h(3)] \frac{1}{h(0)}$$

$$= [11 - 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1] \cdot \frac{1}{1} = 2$$

$$u(4) = [y(4) - u(3)h(1) - u(2)h(2) - u(1)h(3) - u(0)h(4)] \frac{1}{h(0)}$$

$$= [10 - 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 - 1 \cdot 0] \cdot \frac{1}{1} = 1$$

$$u(5) = [7 - 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 - 1 \cdot 0] \cdot \frac{1}{1} = 0$$

$$u(n) = \dots = 0, \quad n \geq 5$$

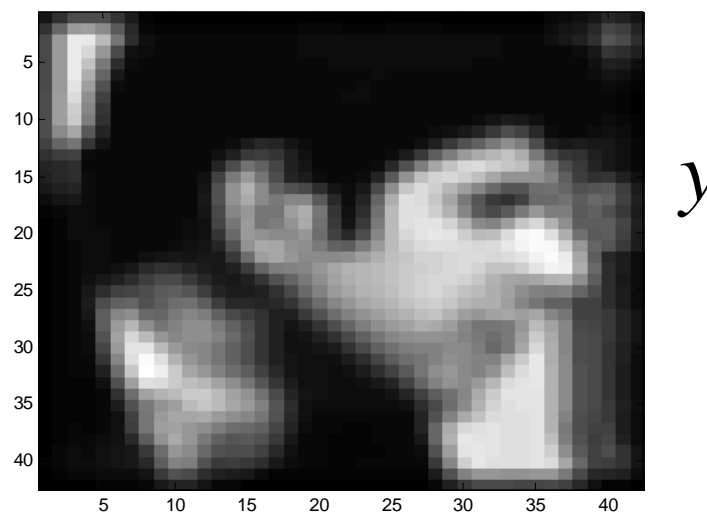
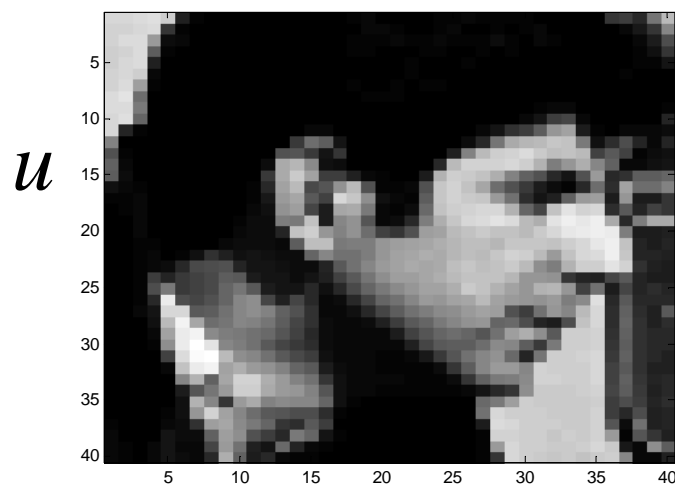
$$\Rightarrow u(n) = \{1, 2, 3, 2, 1\}$$

# 2D konvolucija



$$y(n_1, n_2) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} h(k_1, k_2) u(n_1 - k_1, n_2 - k_2)$$

- Primjer:  $u$  – slika,  $h = \frac{1}{9} \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{Bmatrix}$





# 1D konvolucija, primjer 2

- Miran sustav ima impulsni odziv konačnog trajanja  $h(n) = \{1, 2\}$  i pobuđen je kompleksnom eksponencijalom  $u(n) = z^n$ . Odziv  $y(n)$  mu je:

$$y(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} h(k) u(n-k) = 1 \cdot z^n + 2 \cdot z^{n-1} = (1 + 2 \cdot z^{-1}) \cdot z^n$$

- također kompleksna eksponencijala  $z^n$ , samo promijenjene (kompleksne) amplitude  $1+2z^{-1}$ .



# 1D konvolucija, primjer 2

- Za opći impulsni odziv  $h(n)$ , te pobudu kompleksnom eksponencijalom  $z^n$  imamo:

$$y(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} h(k) u(n-k) = \sum_{-\infty}^{\infty} h(k) z^{n-k} = \underbrace{\left( \sum_{-\infty}^{\infty} h(k) z^{-k} \right)}_{H(z)} \cdot z^n$$

- Odziv je opet kompleksna eksponencijala  $z^n$ , kompleksne amplitude  $H(z)$ :  $z^n \rightarrow H(z) \cdot z^n$ .
- $\Rightarrow$  kompleksna eksponencijala je **svojstvena funkcija** (*eigenfunction*) operatora konvolucije.
- $H(z)$  se zove **prijenosna funkcija** sustava.





# Z-transformacija

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(n) z^{-n} \quad x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) z^{n-1} dz.$$

- Predstavljanje općeg diskretnog signala kompleksnim eksponencijalama.
- Jednostrana Z-transformacija se koristi za analizu kauzalnih signala i sustava.
- Važnija svojstva:

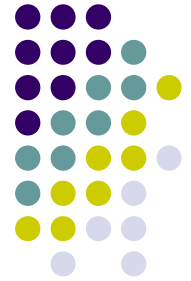
linearnost

$$ax(n) + by(n) \rightarrow aX(z) + bY(z)$$

konvolucija  $\rightarrow$  množenje

$$x(n) * y(n) \rightarrow X(z) \cdot Y(z)$$

# Osnovna tablica jednostrane Z-transformacije



$$\delta(n) \rightarrow 1$$

$$\mu(n) \rightarrow \frac{z}{z-1}$$

$$a^n \mu(n) \rightarrow \frac{z}{z-a}$$

$$na^n \mu(n) \rightarrow \frac{az}{(z-a)^n}$$

$$a^n x(n) \rightarrow X\left(\frac{z}{a}\right)$$

$$x(n+k) \rightarrow z^k \left[ X(z) - \sum_{j=0}^{k-1} x(j)z^{-j} \right]$$

$$x(n-k) \rightarrow z^{-k} \left[ X(z) + \sum_{j=-k}^{-1} x(j)z^{-j} \right]$$

$$nx(n) \rightarrow -z \frac{d}{dz} X(z)$$

$$n^k x(n) \rightarrow \left( -z \frac{d}{dz} \right)^k X(z).$$

uz odgovarajuća područja konvergencije  
(za detalje vidi: Signali i sustavi).



# Primjer 1, rješenje u Z-domeni

$$u(n) = \{1, 2, 3, 2, 1\} \quad X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} X(n) z^{-n}$$
$$h(n) = \{1, 2, 1, 1\}$$

$$U(z) = 1 \cdot z^{-0} + 2 \cdot z^{-1} + 3 \cdot z^{-2} + 2 \cdot z^{-3} + 1 \cdot z^{-4}$$

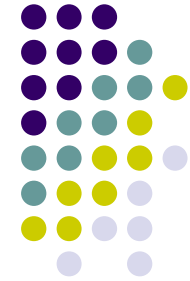
$$H(z) = 1 \cdot z^{-0} + 2 \cdot z^{-1} + 1 \cdot z^{-2} + 1 \cdot z^{-3}$$

- Konvolucija  $\leftrightarrow$  množenje u Z-domeni.
- Množimo polinome:

$$Y(z) = H(z) \cdot U(z) = (1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 2z^{-3} + z^{-4})(1 + 2z^{-1} + z^{-2} + z^{-3})$$
$$= 1 + 4z^{-1} + 8z^{-2} + 11z^{-3} + 10z^{-4} + 7z^{-5} + 3z^{-6} + z^{-7}$$

$$y(n) = \{1, 4, 8, 11, 10, 7, 3, 1\}$$

# Primjer 2, rješenje u Z-domeni



$$Y(z) = 1 + 4z^{-1} + 8z^{-2} + 11z^{-3} + 10z^{-4} + 7z^{-5} + 3z^{-6} + z^{-7}$$

$$H(z) = 1 \cdot z^{-0} + 2 \cdot z^{-1} + 1 \cdot z^{-2} + 1 \cdot z^{-3}$$

$$U(z) = ?$$

- Dekonvolucija  $\leftrightarrow$  množenje u Z-domeni.
- Dijelimo polinome:  
(*na ploči*)

# Sustavi s beskonačnim impulsnim odzivom (IIR)



- Neka je jednačba diferencija sustava:

$$y(n) + a_1 y(n-1) + \dots + a_{N-1} y(n-N+1) + a_N y(n-N) = b_0 u(n) + b_1 u(n-1) + \dots + b_M u(n-M)$$

- Pri izračunu  $y(n)$  lijeva strana jednačbe diferencija daje **rekurzivnu formulu**:

$$y(n) = -a_1 y(n-1) - \dots - a_{N-1} y(n-N+1) - a_N y(n-N) + b_0 u(n) + b_1 u(n-1) + \dots + b_M u(n-M)$$

- Izlaz u koraku  $n$  ovisi o izlazima u prethodnim koracima  $n-1, \dots, n-N$ .

# Sustavi s beskonačnim impulsnim odzivom (IIR)



- U  $Z$ -domeni imamo (sustav je miran, ulaz  $u$  kauzalan):

$$x(n-k) \rightarrow z^{-k} X(z)$$

$$\begin{aligned} & \left(1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{N-1} z^{-N+1} + a_N z^{-N}\right) Y(z) = \\ & \left(b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{M-1} z^{-M+1} + b_M z^{-M}\right) U(z) \end{aligned}$$

- pa prijenosna funkcija glasi:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{M-1} z^{-M+1} + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{N-1} z^{-N+1} + a_N z^{-N}}$$

# Sustavi s beskonačnim impulsnim odzivom (IIR)



- U postupku nalaženja impulsnog odziva nalazimo korijene nazivnika (polove):

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{M-1} z^{-M+1} + a_M z^{-M}}{\prod_{k=1}^N (1 - z^{-1} p_k)}$$

- pa razlažemo  $H(z)/z$  u parcijalne razlomke.
- Radi jednostavnosti, prikazujemo slučaj različitih korijena uz  $M=N$ :

$$H(z) = C_0 + \sum_{k=1}^N C_k \frac{z}{z - p_k}$$

# Sustavi s beskonačnim impulsnim odzivom (IIR)



- Konačno, impulsni odziv je suma  $N$  kompleksnih eksponencijala:

$$h(n) = C_0 \delta(n) + \sum_{k=1}^N C_k p_k^n \mu(n)$$

- Polovi  $p_k$  određuju svaku komponentu odziva  $(p_k)^n = (\rho_k)^n e^{j\Omega_k n}$ .
- Modul  $\rho_k = |p_k|$  određuje radi li se o prigušenoj ( $\rho_k < 1$ ) ili raspirujućoj eksponencijali ( $\rho_k > 1$ ).



# Sustavi s beskonačnim impulsnim odzivom (IIR)



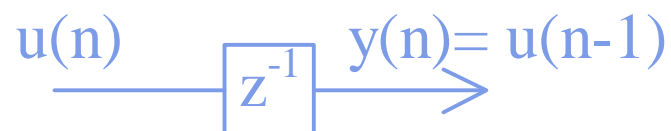
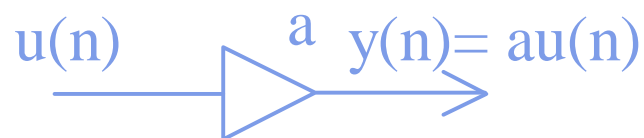
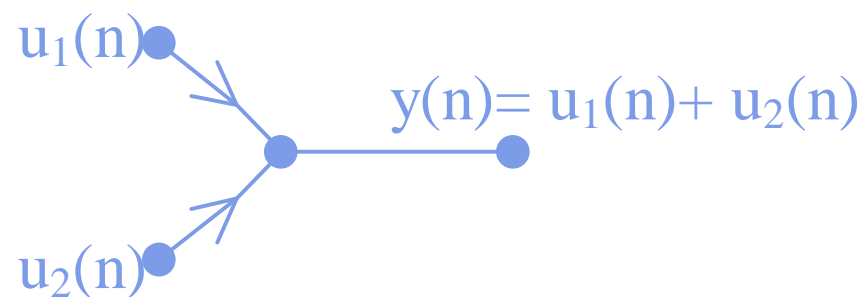
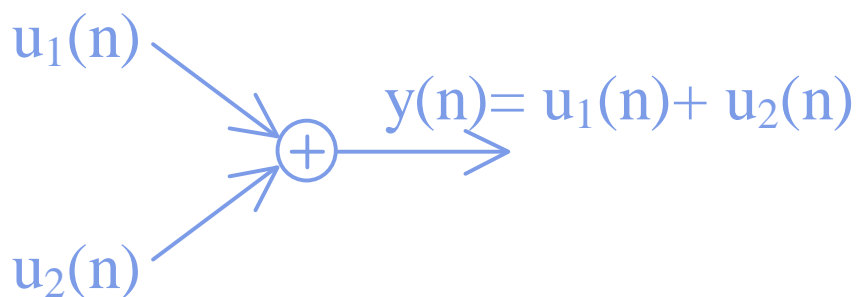
$$h(n) = \sum_{k=1}^N C_k p_k^n$$

- $\Rightarrow$  kauzalan diskretan, linearan i vremenski stalan (LVS) sustav je stabilan ako su mu svi polovi unutar jedinične kružnice.
- Eksponencijale se raspiruju ili trnu, brže ili sporije; očigledno radi se o sustavu s beskonačnim impulsnim odzivom (*eng. IIR = Infinite Impulse Response*).
- Alternativni naziv: rekurzivni sustav.



# Realizacija IIR sustava

- Pojednostavljeno crtanje blok dijagrama: zbrajalo, množilo, element za kašnjenje.



# Realizacija IIR sustava



$$H(z) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{1 + \sum_{m=1}^N a_m z^{-m}} = H_1(z) \cdot H_2(z)$$

● nule od  $H(z)$ :

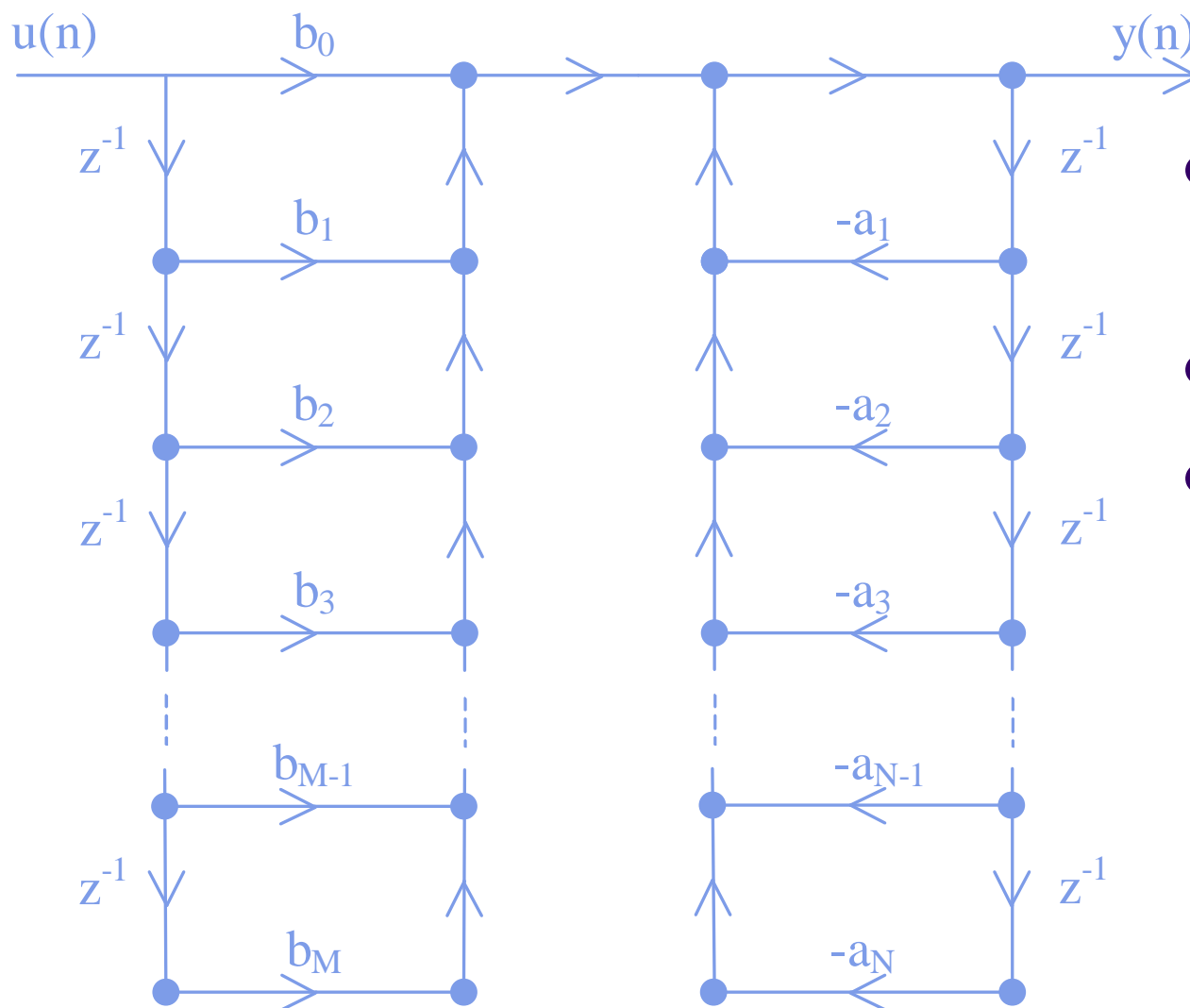
$$H_1(z) = \sum_{m=0}^M b_m z^{-m}$$

■ polovi od  $H(z)$ :

$$H_2(z) = \frac{1}{1 + \sum_{m=1}^N a_m z^{-m}}$$



# Direktna I realizacija IIR filtra



- $M+N+1$  množenja
- $M+N$  zbrajanja
- $M+N$  memorijskih lokacija

# Direktna II realizacija IIR filtra

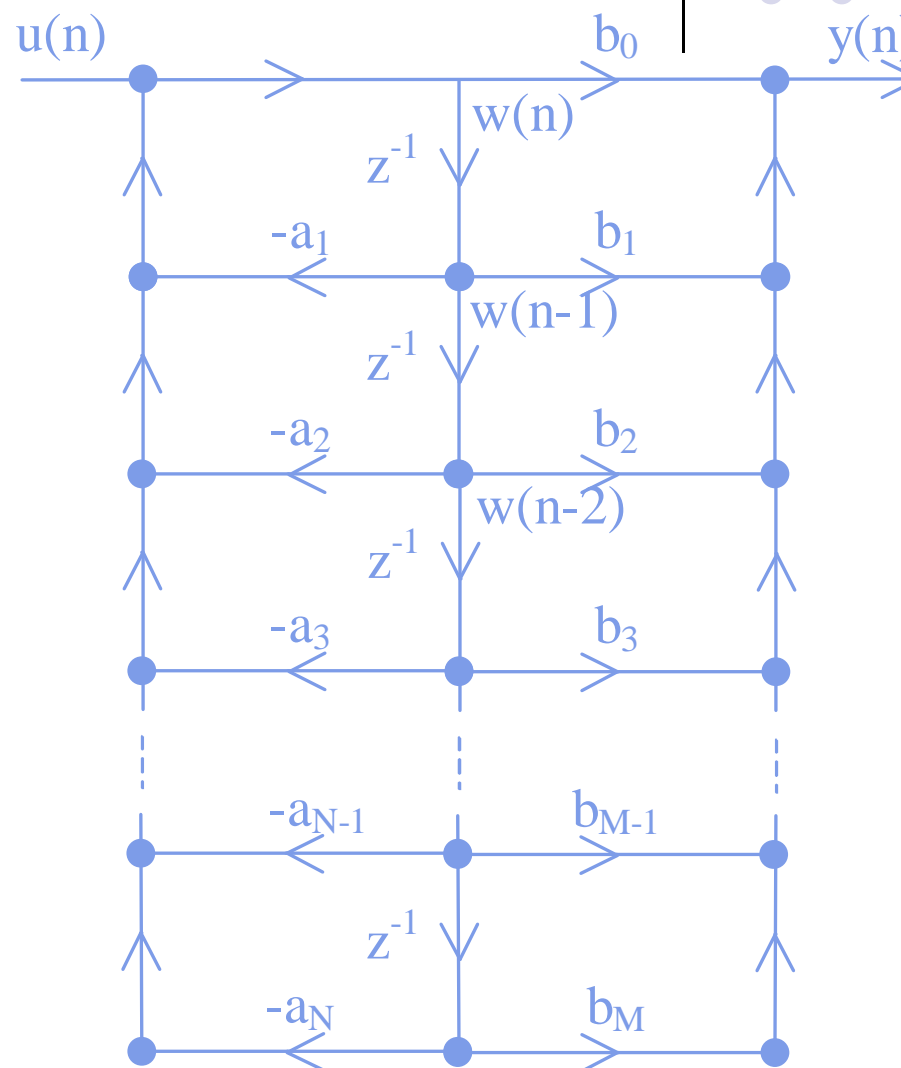


- kompaktnija struktura jer vrijedi:

$$w(n) = -\sum_{m=1}^N a_m w(n-m) + u(n)$$

$$y(n) = \sum_{m=0}^M b_m w(n-m)$$

- $M+N+1$  množenja
- $M+N$  zbrajanja
- $\max(M, N)$  memorijskih lokacija



# IIR sustavi sa samim polovima (*all-pole*)



- Neka je jednađba diferencija sustava:  
$$y(n) + a_1 y(n-1) + \dots + a_{N-1} y(n-N+1) + a_N y(n-N) = u(n)$$
- Za izračun  $y(n)$  imamo rekurziju:  
$$y(n) = -a_1 y(n-1) - \dots - a_{N-1} y(n-N+1) - a_N y(n-N) + u(n)$$
- Izlaz u koraku  $n$  ovisi o izlazima u prethodnim koracima.
- Za  $u(n) = \delta(n)$  i  $n > 0$  jednađba postaje homogena, s rješenjem oblika:  
$$h(n) = \sum_{k=1}^N C_k p_k^n \quad (\text{slučaj različitih korijena } p_k)$$
- Odziv je **beskonačnog trajanja**.

# IIR sustavi sa samim polovima (*all-pole*)

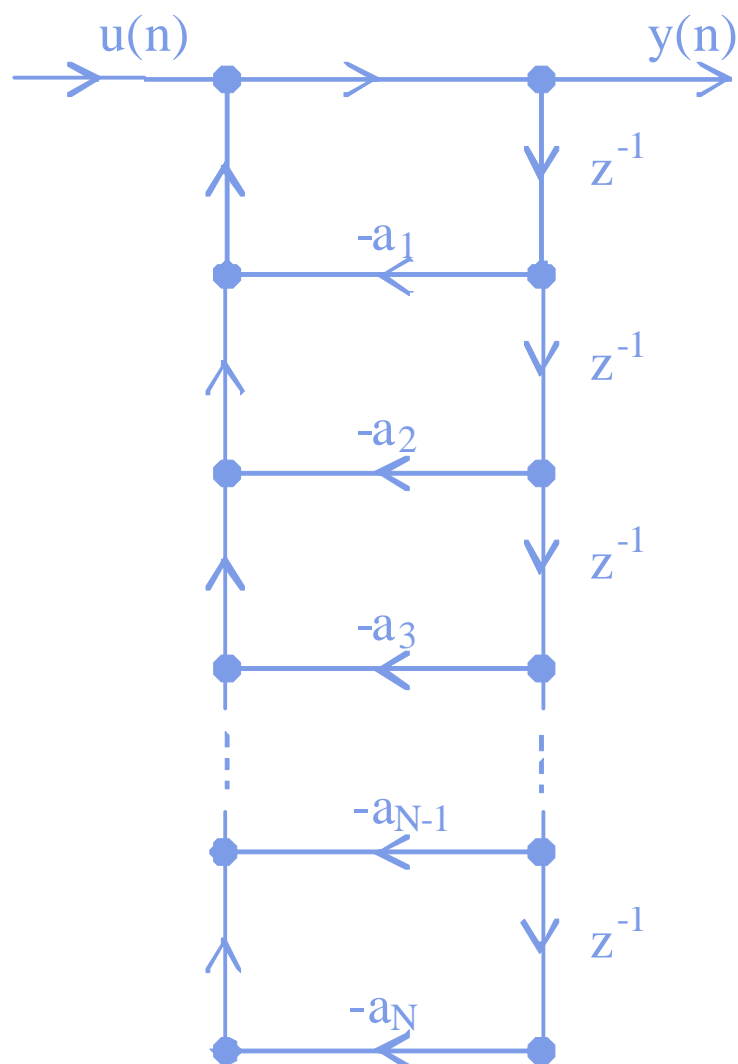


- Prijenosna funkcija ima samo nazivnik:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{N-1} z^{-N+1} + a_N z^{-N}}$$

- Sustav nema nula (korijena brojnika), već **samo polove** (korijene nazivnika).
- Naravno, nedostatak brojnika predstavlja ograničenje u modeliranju realnih sustava.
- Daje dovoljno dobar model npr. prediktora govornog signala, a i mnogih drugih sustava.

# Direktna realizacija, all-pole



- N množenja
- N zbrajanja
- N memorijskih lokacija





# Dekonvolucija u Z-domeni

- U Z-domeni dekonvoluciju možemo promatrati kao primjenu inverzne funkcije.
- Općenito:

$$H(z) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{1 + \sum_{m=1}^N a_m z^{-m}} \quad G(z) = H^{-1}(z) = \frac{1 + \sum_{m=1}^N a_m z^{-m}}{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}$$

- Primjena  $G(z)$  na signalu  $Y$  rekonstruira ulazni signal  $U$ :

$$U(z) = G(z) \cdot Y(z) = H^{-1}(z) \cdot \underbrace{H(z) \cdot U(z)}_{Y(z)} = U(z)$$



# Dekonvolucija u Z-domeni

- Polovi sustava  $H(z)$  su postale nule  $G(z)$ , a nule sustava  $H(z)$  su postali polovi  $G(z)$ .
- Nemamo jamstva za stabilnost inverznog (dekonvolucijskog) sustava!

$$G(z) = \frac{1 + \sum_{m=1}^N a_m z^{-m}}{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}} \leftarrow$$



# Dekonvolucija

$$u(n) = \left[ y(n) - \sum_{k=1}^n u(n-k)h(k) \right] \frac{1}{h(0)}$$

- Otprije poznatu rekurzivnu formulu možemo promatrati kao korak-po-korak rješenje diferencijskog sustava:

$$h_0 u(n) + h_1 u(n-1) + \dots + h_{N-1} y(n-N+1) + h_N u(n-N) = y(n)$$

- uz pretpostavku da je impulsni odziv originalnog sustava konačnog trajanja  $N+1$ .
- Inverzni sustav je all-pole, a stabilnost rješenja ovisi o poziciji polova!



# Dekonvolucija, primjer 1

- U našem primjeru:  $h(n) = \{1, 2, 1, 1\}$

$$H(z) = 1 + 2z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}$$

$$G(z) = H^{-1}(z) = \frac{1}{1 + 2z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}}$$

- Polovi su:
  - $-1.7549$
  - $-0.1226 + j 0.7449$
  - $-0.1226 - j 0.7449$
- Dekonvolucijski sustav je **nestabilan!**
- Mi smo ipak rekonstruirali  $u(n)$ , ali uz aritmetiku beskonačne točnosti, bez mjernog šuma u  $y(n)$ .

# Dekonvolucija *all-pole* sustava



- Ako polazni sustav ima **samo polove**, onda inverzni sustav ima samo nule, a nema nazivnik:

$$G(z) = 1 + \sum_{m=1}^N a_m z^{-m}$$

- Takav sustav ima konačan impulsni odziv i **uvijek je stabilan**.
- Aproksimativno modeliranje stvarnog sustava *all-pole* sustavom ima prednost jednostavne realizacije dekonvolucije.

# Dekonvolucija općeg sustava, nastavak



- Kada će dekonvolucija općeg sustava rezultirati stabilnim  $G(z)$  ?

$$G(z) = \frac{1 + \sum_{m=1}^N a_m z^{-m}}{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}$$

- Kako nule  $H(z)$  postaju polovi  $G(z)$ , nužno je da budu unutar jedinične kružnice.
- Sustav s nulama unutar jedinične kružnice naziva se **sustav s minimalnom fazom**.

# Sustavi s konačnim impulsnim odzivom (FIR)



- Neka je jednačba diferencija sustava:

$$y(n) = b_0 u(n) + b_1 u(n-1) + \dots + b_M u(n-M)$$

- Samo desna stranu jednačbe diferencija.
- Pri izračunu  $y(n)$  koristi se ulaz  $u$  koraku  $n$  te u prethodnim koracima  $n-1, \dots, n-M$ .
- Kako odziv ne ovisi o prethodnim izlazima, ovakvi sustavi nazivaju se i **nerekurzivnim**.
- U  $Z$ -domeni (uz kauzalnu pobudu) imamo:

$$Y(z) = (b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}) U(z)$$

# Sustavi s konačnim impulsnim odzivom (FIR)



- Prijenosna funkcija nema nazivnik:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = b_0 + b_1 z^{n-1} + \dots + b_M z^{n-M}$$

- Impulsni odziv glasi:

$$h(n) = b_0 \delta(n) + b_1 \delta(n-1) + \dots + b_M \delta(n-M)$$

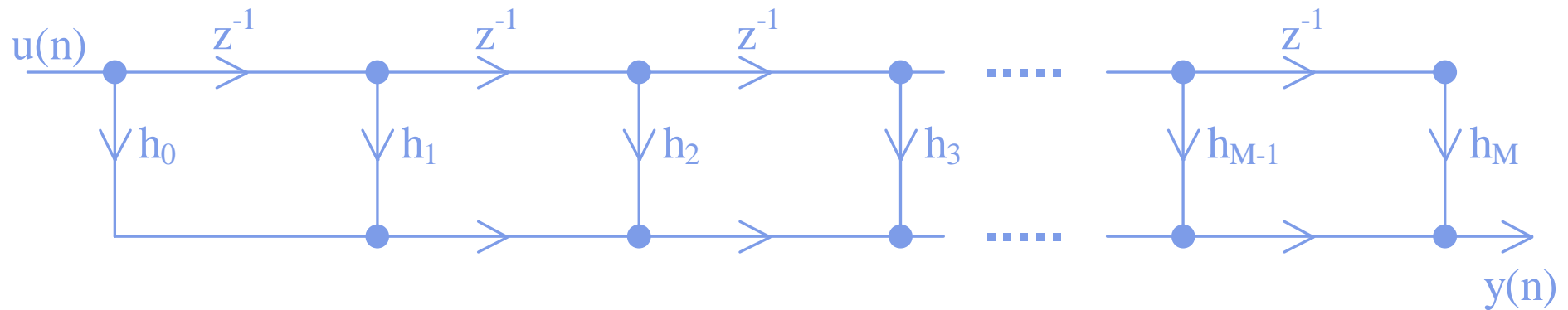
- i očigledno je trajanja  $M+1$ .
- Sustav je s **konačnim impulsnim odzivom** (*eng. Finite Impulse Response*).
- Sustav ima **samo nule** (*eng. all-zero*) i uvijek je stabilan.



# Direktna realizacija FIR filtra



$$y(n) = \sum_{m=0}^M h_m u(n-m)$$



- $M+1$  množenja,
- $M$  memorijskih lokacija,
- $M$  zbrajanja.

# Frekvencijska karakteristika diskretnih LVS sustava



- Za opći impulsni odziv  $h(n)$ , te pobudu kompleksnom harmonijskom funkcijom  $e^{j\omega n}$  imamo:

$$y(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} h(k) u(n-k) = \sum_{-\infty}^{\infty} h(k) e^{j\omega(n-k)} = \underbrace{\left( \sum_{-\infty}^{\infty} h(k) e^{-j\omega k} \right)}_{H(e^{j\omega})} \cdot e^{j\omega n}$$

- Odziv je opet harmonijska funkcija  $e^{j\omega n}$ , kompleksne amplitude  $H(e^{j\omega})$ :  $e^{j\omega n} \rightarrow H(e^{j\omega}) \cdot e^{j\omega n}$ .
- $\Rightarrow$  ovo je samo specijalni slučaj otprije poznate karakteristične funkcije  $z^n$ , uz izbor  $z=e^{j\omega}$ .

# Frekvencijska karakteristika diskretnih LVS sustava

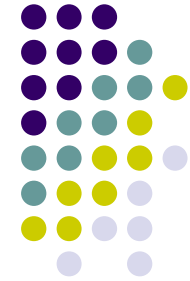


- Odnos kompleksnih amplituda odziva i pobude, kad je pobuda harmonijska funkcija  $e^{j\omega n}$  nazivamo frekvencijska karakteristika diskretnog sustava.

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{-j\omega k}$$

- Izraz je sličan izrazu za Z-transformaciju, ali suma je dvostrana, uz  $z=e^{j\omega}$ .
- Rezultat je kompleksna funkcija frekvencije  $\omega$ .

# Amplitudna i fazna karakteristika



- Kompleksnu funkciju možemo zapisati i u polarnom obliku:

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\angle H(e^{j\omega})}$$

- Modul nazivamo **amplitudnom**, a argument **faznom** frekvencijskom karakteristikom.
- Amplitudna karakteristika govori o odnosu amplituda odziva i harmonijske pobude za svaku frekvenciju.
- Faza nosi informaciju o vremenskim odnosima.

# AF i FF karakteristika, primjer 1



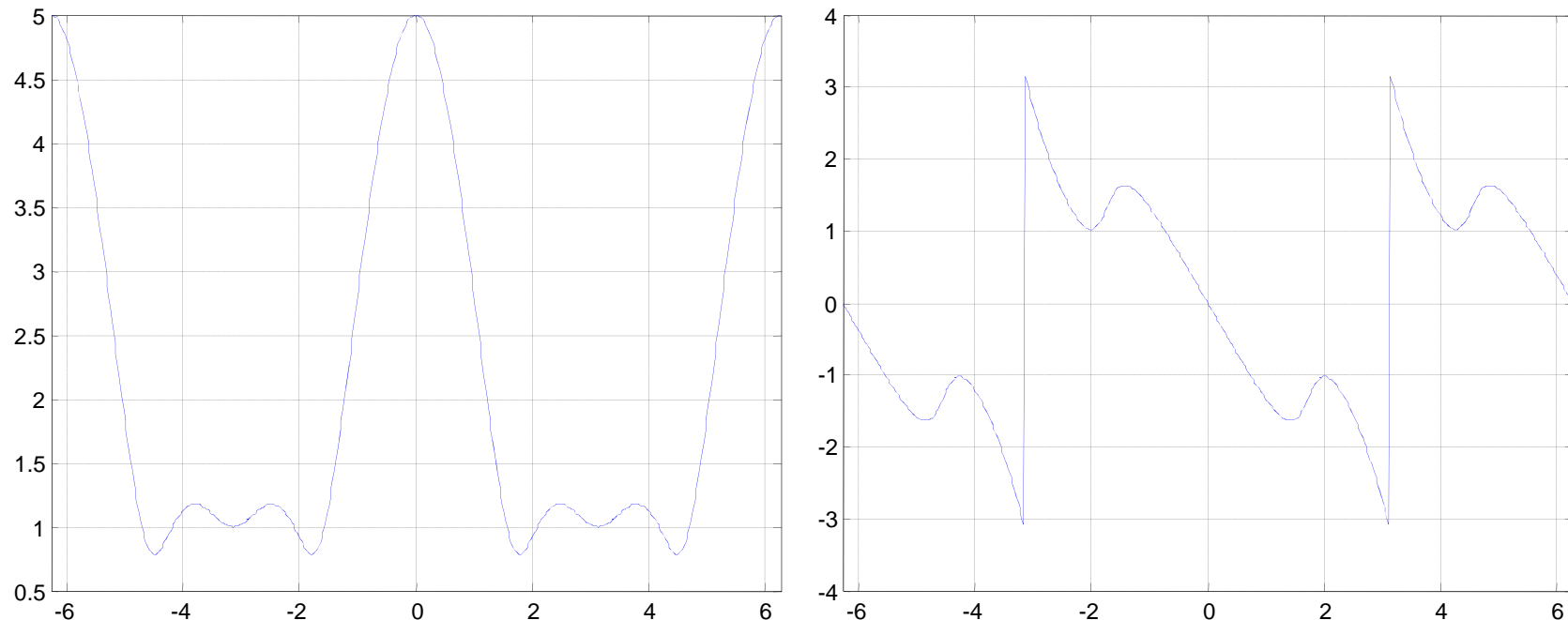
$$h(n) = \{1, 2, 1, 1\} \quad H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{-j\omega k}$$

$$H(e^{j\omega}) = 1 \cdot e^{-j\omega 0} + 2 \cdot e^{-j\omega 1} + 1 \cdot e^{-j\omega 2} + 1 \cdot e^{-j\omega 3}$$

$$H(e^{j\omega}) = 1 + 2 \cdot \cos \omega + \cos 2\omega + \cos 3\omega \\ - j(2 \cdot \sin \omega + \sin 2\omega + \sin 3\omega)$$

- Frekvencijska karakteristika diskretnog sustava sastoji se od kosinusoida i sinusoida i uvijek je  $2\pi$  periodična funkcija.
- Realni dio je parna, a imaginarni dio neparna funkcija frekvencije.

# AF i FF karakteristika, primjer 1



- Lijevo modul (AFK), desno argument (FFK).
- Prikaz za kutne frekvencije  $\omega$  u rasponu od  $2\pi$  do  $2\pi$  (dvije periode).

# Utjecaj kašnjenja na AFK i FFK



$$h_1(n) = \{0, 1, 2, 1, 1\}$$

$$\begin{aligned} H_1(e^{j\omega}) &= 0 \cdot e^{-j\omega 0} + 1 \cdot e^{-j\omega 1} + 2 \cdot e^{-j\omega 2} + 1 \cdot e^{-j\omega 3} + 1 \cdot e^{-j\omega 4} \\ &= \left( 1 \cdot e^{-j\omega 0} + 2 \cdot e^{-j\omega 1} + 1 \cdot e^{-j\omega 2} + 1 \cdot e^{-j\omega 3} \right) e^{-j\omega 1} \end{aligned}$$

$$H_1(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) \cdot e^{-j\omega}$$

$$\left| H_1(e^{j\omega}) \right| = \left| H(e^{j\omega}) \right| \quad \angle H_1(e^{j\omega}) = \angle H(e^{j\omega}) - \omega$$

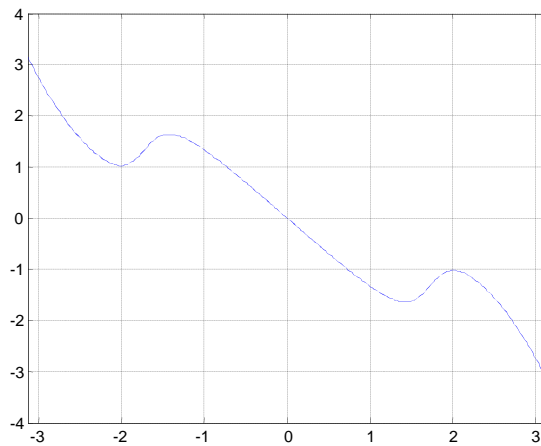
- Kašnjenje ne utječe na amplitudu.
- Kašnjenje za 1 odgovara uvećanju faze za  $-\omega$ .
- Općenito, pomak signala daje aditivni fazni član koji je linearna funkcija frekvencije:

$$h(n - \Delta) \quad \Leftrightarrow \quad H(e^{j\omega}) \cdot e^{-j\Delta\omega} \quad \angle H(e^{j\omega}) - \Delta\omega$$

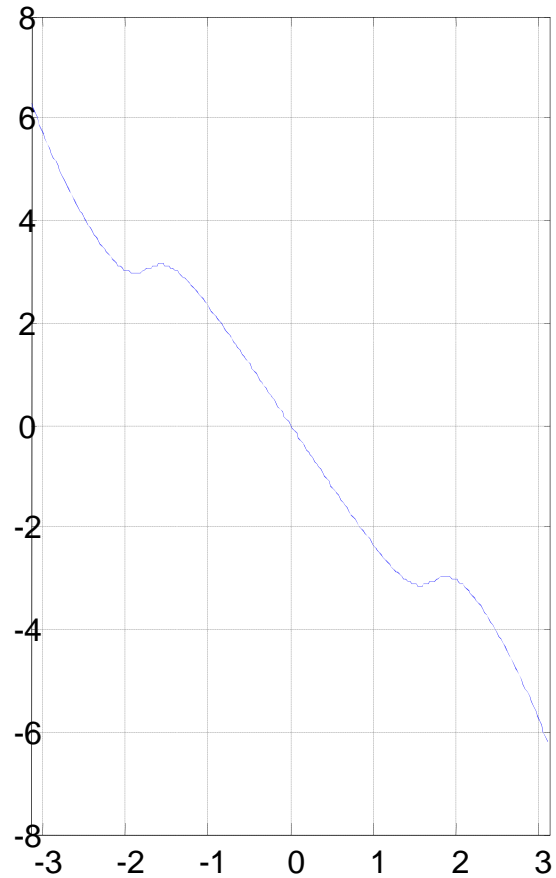
# Fazna karakteristika, pomak 1



$$h(n) = \{1, 2, 1, 1\}$$



$$h(n) = \{0, 1, 2, 1, 1\}$$







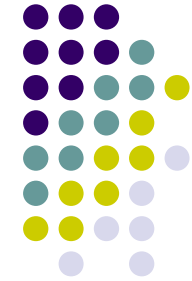
# Grupno kašnjenje

$\theta(\omega) = \angle H(e^{j\omega})$  faza

$\tau(\omega) = -\frac{d\theta(\omega)}{d\omega}$  “grupno kašnjenje”

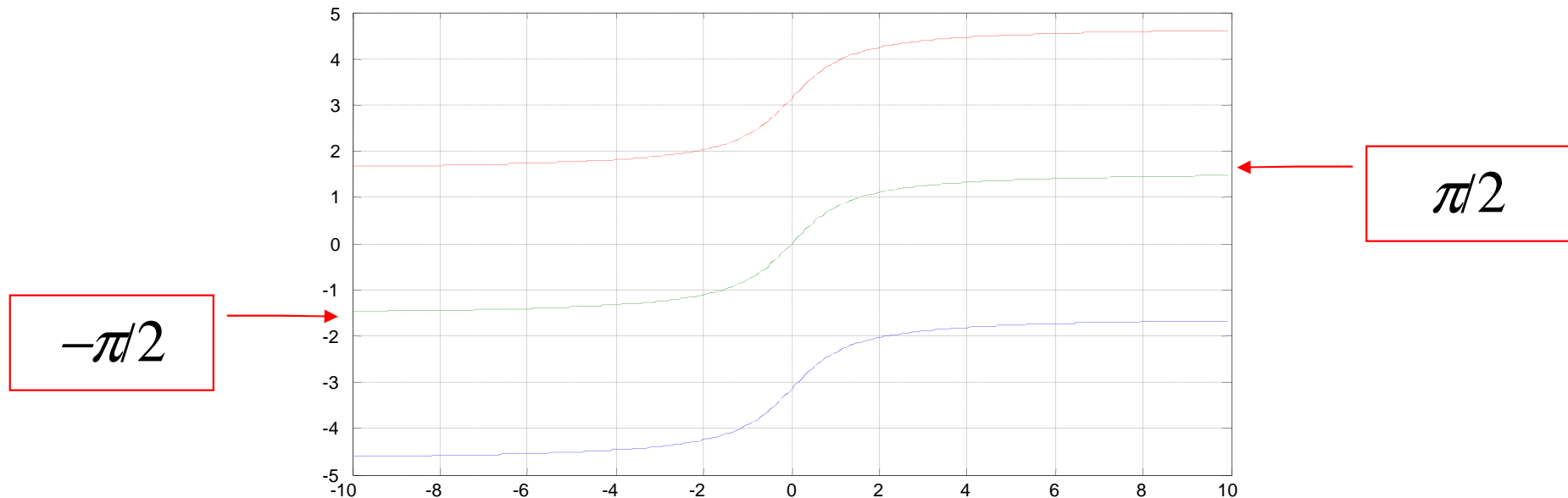
- Grupno kašnjenje je negativna derivacija fazno-frekvencijske karakteristike.
- Sustavi s nejednakim grupnim kašnjenjem (linearno) izobličavaju signal.
- Poželjno svojstvo sustava je konstantno grupno kašnjenje → faza mora biti linearna funkcija frekvencije.

# Premotavanje fazne karakteristike

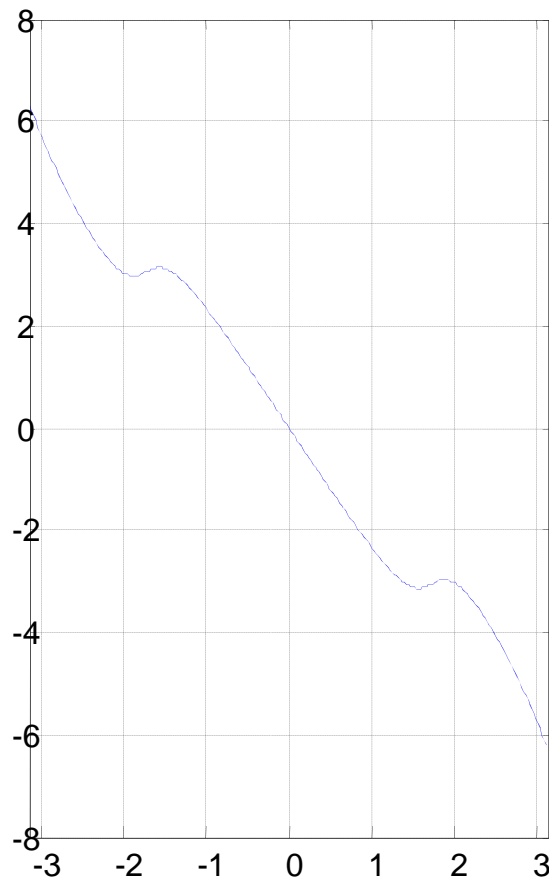


$$\angle H(e^{j\omega}) = \arctan\left(\frac{\text{Im } H(e^{j\omega})}{\text{Re } H(e^{j\omega})}\right)$$

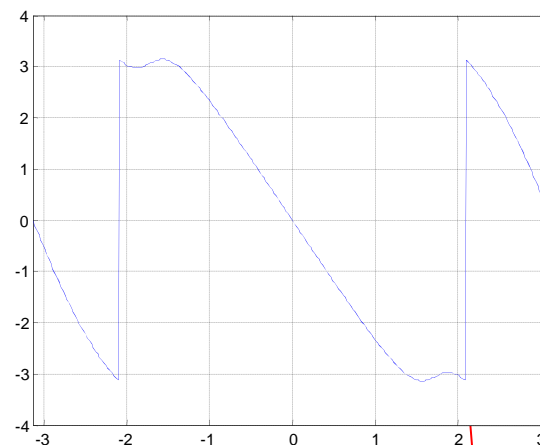
- Arkus tangens je višeznačna funkcija.
- Redovito dobivamo rješenje od  $-\pi/2$  do  $\pi/2$ , a uključimo li predznake brojnika i nazivnika od  $-\pi$  do  $\pi$ .



# Premotavanje fazne karakteristike



- Premotana faza zbog ograničenja od  $-\pi$  do  $\pi$ .



mjesto premotavanja

- Ideja: derivacija *arctg* nije višeznačna!



# Izračun grupnog kašnjenja

$$\tau(e^{j\omega}) = -\frac{d}{d\omega} \angle H(e^{j\omega}) = -\frac{d}{d\omega} \arctan\left(\frac{\operatorname{Im} H(e^{j\omega})}{\operatorname{Re} H(e^{j\omega})}\right)$$

(kraće zapisano)

$$= -\frac{1}{1 + \left(\frac{\operatorname{Im}}{\operatorname{Re}}\right)^2} \frac{d}{d\omega} \left(\frac{\operatorname{Im}}{\operatorname{Re}}\right) = -\frac{\operatorname{Re}^2}{\operatorname{Re}^2 + \operatorname{Im}^2} \left(\frac{\operatorname{Im}' \operatorname{Re} - \operatorname{Im} \operatorname{Re}'}{\operatorname{Re}^2}\right)$$

$$= \frac{\operatorname{Im} \operatorname{Re}' - \operatorname{Im}' \operatorname{Re}}{\operatorname{Im}^2 + \operatorname{Re}^2} \quad (\text{zbog preglednosti svuda izostavljeno } H(e^{j\omega}))$$

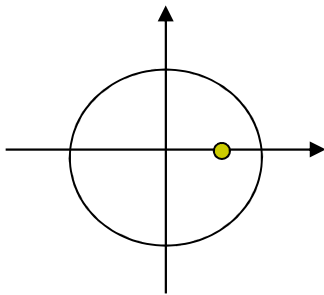
- Izraz daje grupno kašnjenje, a integral grupnog kašnjenja je **nepremotana faza**:

$$\theta(e^{j\omega}) = -\int_0^\omega \tau(e^{jw}) dw + \theta_0$$

# FIR sustavi s recipročnim nulama



- $H_1(z) = 1 - \rho z^{-1}$

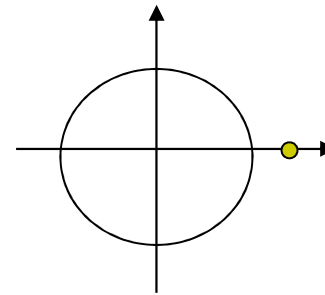


$$H_1(e^{j\omega}) = 1 - \rho e^{-j\omega}$$

$$H_1(e^{j\omega}) = 1 - \rho \cos \omega + j\rho \sin \omega$$

$$|H_1(e^{j\omega})| = \sqrt{1 + \rho^2 - 2\rho \cos \omega}$$

$$H_2(z) = \rho - z^{-1}$$



$$H_2(e^{j\omega}) = \rho - e^{-j\omega}$$

$$H_2(e^{j\omega}) = \rho - \cos \omega + j \sin \omega$$

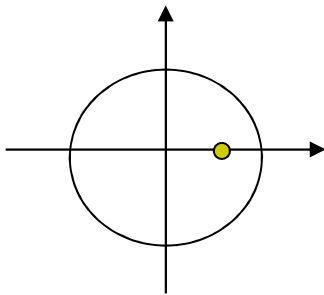
$$|H_2(e^{j\omega})| = \sqrt{1 + \rho^2 - 2\rho \cos \omega}$$

- Sustavi s recipročnim nulama imaju iste amplitudno frekvencijske karakteristike!

# FIR sustavi s recipročnim nulama

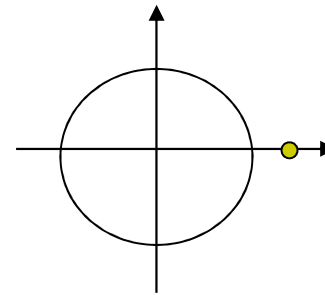


- $H_1(z) = 1 - \rho z^{-1}$



$$H_1(e^{j\omega}) = 1 - \rho \cos \omega + j\rho \sin \omega$$

- $H_2(z) = \rho - z^{-1}$



$$H_2(e^{j\omega}) = \rho - \cos \omega + j \sin \omega$$

$$\dots \tau_1(e^{j\omega}) = \frac{\rho(\rho - \cos \omega)}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos \omega}$$

$$\dots \tau_2(e^{j\omega}) = \frac{\rho(\rho^{-1} - \cos \omega)}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos \omega}$$

$$\rho < 1 \rightarrow \tau_1 < \tau_2$$

- Sustav s nulama unutar jedinične kružnice ima manje grupno kašnjenje (“minimalnu fazu”)!

# Dekonvolucija općeg sustava, nastavak 2.



- Neka je  $H(z)$  opći IIR sustav.
- Sve nule izvan jedinične kružnice zamijenimo recipročnima: novi sustav  $H_{min}(z)$  ima jednaku amplitudno-frekvencijsku karakteristiku kao polazni, ali je minimalne faze (i manjeg grupnog kašnjenja).
- Dekonvolucija inverznim sustavom  $G_m(z) = H_{min}^{-1}(z)$  je stabilna, ali uz faznu pogrešku.
- Fazna pogreška za određene primjene nije važna!

# Konstantno grupno kašnjenje



- Pokazuje se da sustav s konstantnim grupnim kašnjenjem (linearnom fazom) ima simetričan ili antisimetričan impulsni odziv.
- Lako je konstruirati FIR sustav sa željenim svojstvima simetrije.
- Razlikujemo 4 moguća rješenja.

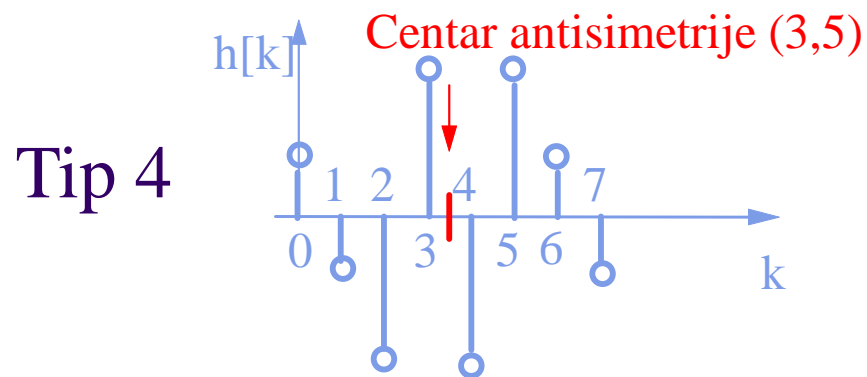
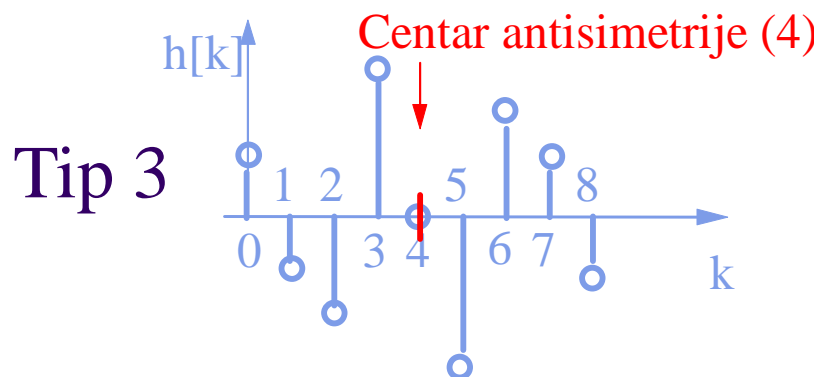
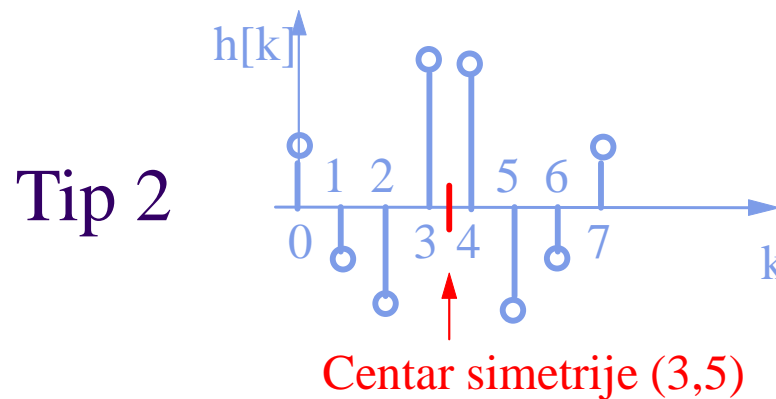
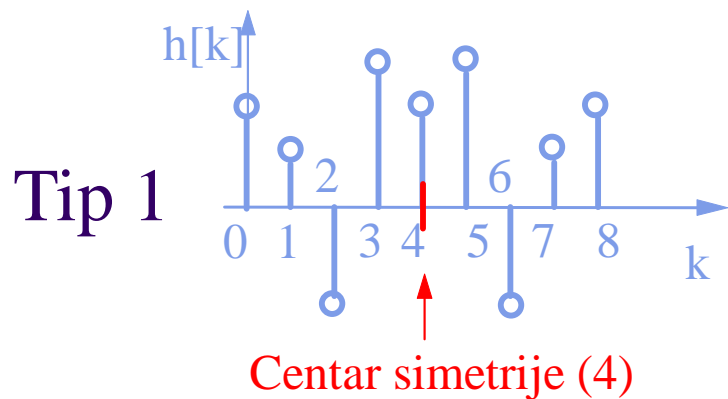


# Tipovi FIR-filtara



- Tip 1 - simetričan impulsni odziv,  
- neparan broj uzoraka impulsnog odziva.
- Tip 2 - simetričan impulsni odziv,  
- paran broj uzoraka impulsnog odziva.
- Tip 3 - antisimetričan impulsni odziv,  
- neparan broj uzoraka impulsnog odziva.
- Tip 4 - antisimetričan impulsni odziv,  
- paran broj uzoraka impulsnog odziva.

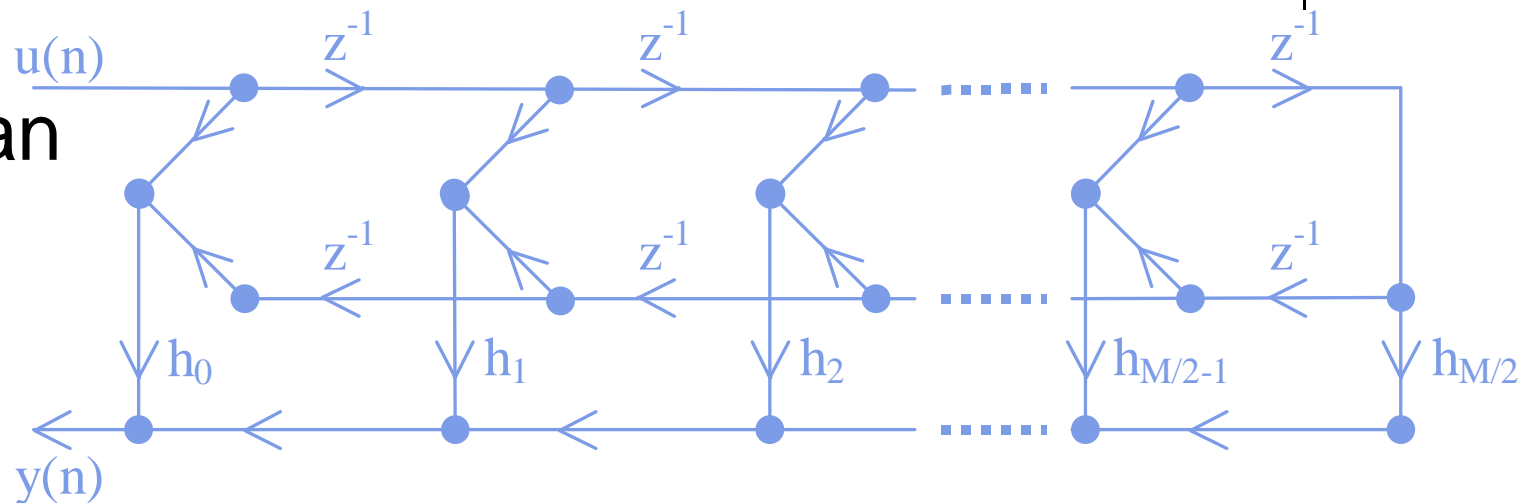
# Tipovi FIR-filtara ...



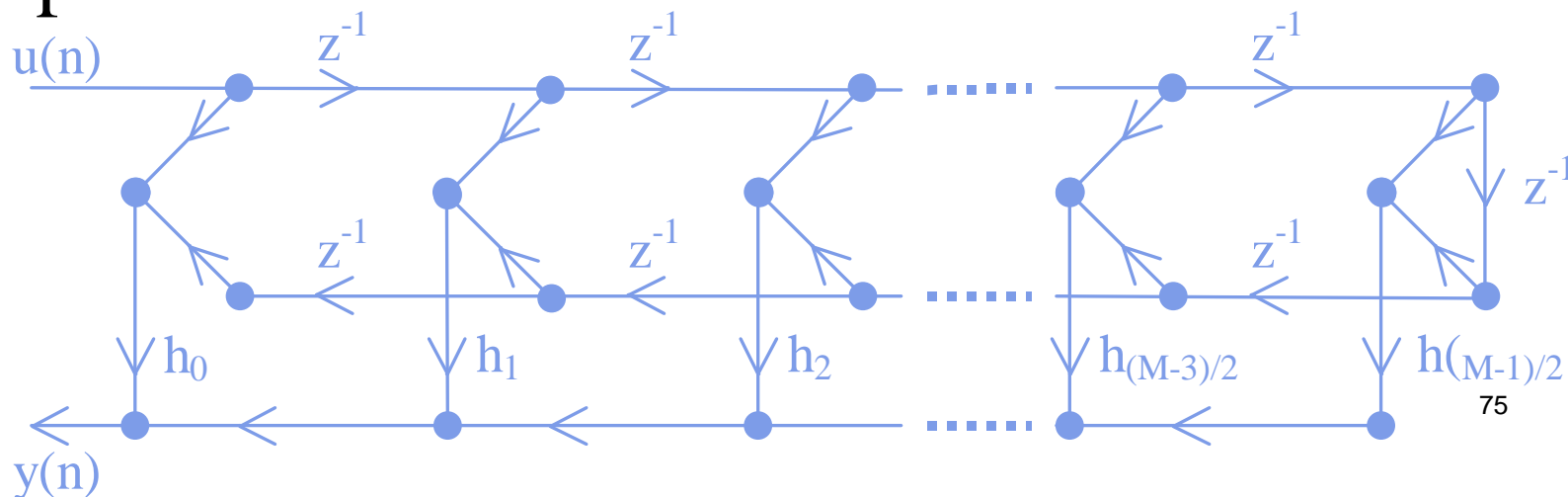
# Strukture za FIR filtre linearne faze



- M paran



- M neparan



# Svojstva FIR filtara



- Aproksimativno modeliranje stvarnog sustava FIR sustavom ima prednost jednostavne realizacije.
- Sustav je uvijek stabilan.
- Moguće je konstruirati kauzalne filtre konačnog reda s linearnom fazom (simetričnim impulsnim odzivom, konstantnim grupnim kašnjenjem, bez faznog izobličenja) a sve uz upola manje množila.



# Teme predavanja

- Reprezentacija signala i sustava
- Osnovne podjele i osnovni signali
- Linearni sustavi, impulsni odziv i konvolucija
- Dekonvolucija
- Z transformacija, prijenosna funkcija, frekvencijska karakteristika
- Sustavi s beskonačnim (IIR) i konačnim (FIR) impulsnim odzivom
- Grupno kašnjenje, linearna faza
- Tipovi FIR filtara s linearnom fazom