Pismeni ispit iz Linearne algebre

19. rujna 2012.

1. [**2 boda**] Zadana je matrica
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$
i vektor $\mathbf{b} = (1, 3)^\top$, s elementima iz polja $\mathbb{Z}_5$. Izračunajte $\mathbf{A}^{-1}$ i riješite jednadžbu $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

2. [**3 boda**] U kompleksnom vektorskom prostoru $\mathbb{C}^3$ zadan je skup
$$M = \{(1, 1, i), (i, 1, 1), (2i, 1 + i, 0)\}.$$
Provjerite je li skup M baza za $\mathbb{C}^3$.

3. [**5 bodova**] Zadan je skup $M = \{\mathbf{X} \in M_{2,2}(\mathbb{R}) \mid \mathbf{AX} = \mathbf{0}\}$ pri čemu je
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$
Pokažite da je M vektorski prostor i odredite mu dimenziju, te neku bazu. Odredite neku bazu za $M^\perp$, pri čemu je skalarni produkt na $M_{2,2}(\mathbb{R})$ zadan s $(\mathbf{X}|\mathbf{Y}) = \mathrm{tr}(\mathbf{Y}^\top\mathbf{X})$

4. [**7 bodova**] Zadan je operator $A\colon P_2 \to \mathbb{R}^4$ s
$$A(p) = (p(-1), p(0), p(1), p(2)).$$
(a) (2 boda) Pokažite da je A linearan operator i odredite mu matricu u paru kanonskih baza prostora P_2 i $\mathbb{R}^4$.

(b) (4 boda) Odredite mu neku bazu za sliku i jezgru te njegov rang i defekt.

(c) (1 bod) Ispitajte je li operator A injektivan.

5. [**8 bodova**] Zadana je matrica
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$
(a) (3 boda) Odredite vlastite vrijednosti i vlastite podprostore matrice $\mathbf{A}$.

(b) (2 boda) Može li se $\mathbf{A}$ dijagonalizirati? Ako da, kojoj dijagonalnoj matrici je slična?

(c) (3 boda) Iskažite Hamilton-Cayleyev teorem te koristeći ga, izračunajte $\mathbf{A}^{-1}$.

Okrenite!

6. [**7 bodova**] Za kvadratnu matricu $\mathbf{A}$, matrica $\sin \mathbf{A}$ definira se kao

$$\sin \mathbf{A} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\mathbf{A}^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

analogno kao za MacLaurinov razvoj funkcije $f(x) = \sin x$. Neka je $\lambda \in \mathbb{R}$ i $\mathbf{A}_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}$.

(a) (2 boda) Dokažite da red $\sin \mathbf{A}$ konvergira za bilo koju kvadratnu matricu $\mathbf{A}$.

(b) (2 boda) Rabeći definiciju, izračunajte matricu $\sin(\mathbf{A}_\lambda)$.

(c) (2 boda) U ovisnosti o λ odredite spektar matrice $\sin(\mathbf{A}_\lambda)$ te odgovarajuće vlastite vektore.

(d) (1 bod) Odredite sve vrijednosti λ za koje je matrica $\sin(\mathbf{A}_\lambda)$ stabilna.

7. [**5 bodova**]

(a) (1 bod) S pomoću Geršgorinova teorema dokažite da su dijagonalno dominantne matrice regularne. Prethodno definirati dijagonalno dominantne matrice.

(b) (2 boda) Zadana je matrica $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$. Crtanjem Geršgorinovih krugova ispitajte je li ta matrica regularna. Je li ta matrica stabilna? Obrazložite.

(c) (2 boda) Konvergira li Gauss-Seidelova iterativna metoda za problem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, gdje je $\mathbf{b} = (-16, 27, -9)^\top$, a matrica $\mathbf{A}$ je zadana u (b)? Izračunajte prvu iteraciju po toj metodi, ako je nulta iteracija odabrana kao vektor $(1, 0, 0)$.

8. [**5 bodova**] Zadana je obična diferencijalna jednadžba drugog reda $\ddot{u}(t) + 4u(t) = 0$, gdje je $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nepoznata funkcija.

(a) (1 bod) Napišite tu diferencijalnu jednadžbu u obliku linearnog sustava prvog reda.

(b) (3 boda) Riješite pripadajući Cauchyjev problem za taj sustav.

(c) (1 bod) U slučaju (b), odredite sve moguće početne uvjete za koje pripadajući vektor $\mathbf{x}(t)$ konvergira kada t ide u $+\infty$.

9. [**8 bodova**] Zadana je matrica $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) (3 boda) Odredite skraćenu singularnu dekompoziciju te matrice.

(b) (2 boda) Izračunajte pseudoinverz matrice $\mathbf{A}$ tako da najprije odredite skraćenu singularnu dekompoziciju matrice $\mathbf{A}^+$.

(c) (1 bod) Odredite $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ tako da je za $\mathbf{b} = (\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$ vrijednost $||\mathbf{Ax} - \mathbf{b}||_2$ minimalna.

(c) (2 boda) Izračunajte Frobeniusovu i spektralnu normu pravokutne matrice u ovisnosti o njenim singularnim vrijednostima. Obrazložite.