

Završni ispit iz Matematike 1

27. siječnja 2012.

1. [5 bodova] U ovisnosti o parametru $a \in \mathbb{R}$ riješite sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{aligned}2x + y + (a + 4)z &= 3 \\x + 2z &= 1 \\x - ay - 2z &= 3.\end{aligned}$$

2. [5 bodova] (a) Koristeći definiciju funkcije kosinus hiperbolički izvedite prikaz funkcije area kosinus hiperbolički pomoću funkcije \ln .
(b) Skicirajte funkciju $f(x) = 5 - 4 \operatorname{ch}(x - 2)$ i izračunajte njene nultočke.
3. [5 bodova] Odredite područje definicije, ponašanje na rubu područja definicije, asimptote, intervale monotonosti, lokalne ekstreme, intervale konveksnosti i konkavnosti, točke infleksije, te nacrtajte kvalitativni graf funkcije

$$f(x) = \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 2}}.$$

4. [5 bodova] U lik omeđen krivuljom $y = \sqrt{4 - x^2}$ i osi x upišite jednakokračni trapez maksimalne ploštine tako da mu dulja osnovica leži na osi x . Koliko iznosi ta ploština?
5. [5 bodova] (a) Iskažite Taylorov teorem.
(b) Napišite Taylorovu formulu za funkciju $f(x) = \ln(1 + x)$, $x \in (-1, 1)$, u točki $c = 0$.
(c) Koristeći ostatak u Lagrangeovom obliku, odredite minimalni stupanj Taylorovog polinoma iz (b) dijela tako da aproksimira vrijednosti funkcije $f(x) = \ln(1 + x)$ za $x \in (-1/2, 0)$ s točnošću 10^{-2} .

6. [5 bodova] (a) Izvedite formulu za derivaciju umnoška dviju funkcija.
(b) Izvedite formulu za parcijalnu integraciju u neodređenom integralu.
(c) Izračunajte $\int \ln^2 x \, dx$.

Okrenite!

7. [5 bodova]

(a) Neka je f neprekinuta na $[a, b]$, te neka je

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Služeći se definicijom derivacije i teoremom srednje vrijednosti integralnog računa, dokažite da za svaki $x \in (a, b)$, vrijedi $F'(x) = f(x)$.

(b) Služeći se tvrdnjom pod (a), dokažite Newton-Leibnizovu formulu.

(c) Neka je

$$G(x) = \int_x^{x+1} \sqrt{t} e^{-t} dt.$$

Riješite jednadžbu $G'(x) = 0$.

8. [5 bodova] (a) Izvedite rekurzivnu formulu za

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx.$$

(b) Koristeći se rekurzivnom formulom iz (a) dijela, izračunajte

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{10} x dx.$$

9. [5 bodova] Izračunajte $\int_0^{\infty} \frac{dx}{3e^{2x} + 1}$.

10. [5 bodova] Izračunajte ploštinu lika omeđenog krivuljama $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$ i $y = \sqrt{6 - 2x}$. Skicirajte zadani lik!

Vrijeme pisanja: 2h i 30 min. Nije dozvoljena uporaba računala niti priručnika.