

MATEMATICKA ANALIZA 2

Dodatni zadaci iz ekstrema funkcije više varijabli

1. Naći i ispitati ekstreme funkcije:

- a) $u = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$,
- b) $z = x^2 - y^4$,
- c) $z = e^{x^2-y}(5 - 2x + y)$,
- d) $z = x^3 + xy^2 + 6xy$,
- e) $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x - 3$,
- f) $z = 4x^2 - y^2 - 4x + 4y - 3$,
- g) $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$,
- h) $z = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 - 2xy$,
- i) $u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$,
- j) $z = (x - y)^2 + (y - 1)^2$.

2. Naći i ispitati ekstreme funkcije $z = z(x, y)$ zadane implicitno jednačbom:
 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0$.

3. U pravokutnom jednakokrakom trokutu naći točku za koju je suma kvadrata udaljenosti od vrhova trokuta najmanja.

4. Odredite najkraću udaljenost mimosmjernih pravaca $p_1 \dots \frac{x-5}{1} = \frac{y}{-16} = \frac{z+4}{2}$, $p_2 \dots \frac{x-27}{2} = \frac{y+25}{1} = \frac{z-1}{-2}$ i točke na pravcima za koje je udaljenost najkraća.

5. Naći i ispitati lokalne ekstreme funkcije:

- a) $z = x + 2y$ uz uvjet $x^2 + y^2 = 5$,
- b) $u = x^3 + xy - z^2$ uz uvjete $x - z = 1, x - y = 5$,
- c) $u = 3x + 2y + 4z$ uz uvjete $x^2 + y^2 = 1, x + z = 1$,
- d) $u = xyz$ uz uvjete $x + y + z = 5, xy + yz + xz = 8$.

RJEŠENJA:

1. a) \min u $T(24, -144, -1)$ b) nema ekstrema, c) nema ekstrema,
d) \min u $T_1(\sqrt{3}, -3)$, \max u $T_2(-\sqrt{3}, -3)$, e) \max u $T(4, 4)$, f) nema ekstrema,
g) \min u $T_1(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, \max u $T_2(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, h) \min u $T_1(1, 1), T_2(-1, -1)$, i) \min u $T(-1, -2, 3)$ j) nema ekstrema.

2. \min u $T_1(1, -2, -2)$, \max u $T_2(1, -2, 8)$, 3. \min u $T(\frac{a}{3}, \frac{a}{3})$

4. $d_{\min} = 15, A(7, -32, 0), B(17, -30, 11)$

5. a) \min u $T_1(-1, -2)$, \max u $T_2(1, 2)$,
b) \min u $T_1(1, -4, 0)$, \max u $T_2(-1, -6, -2)$,
c) \min u $T_1(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 1 - \frac{1}{\sqrt{5}})$, \max u $T_2(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{5}})$,
d) \min u $T_1(2, 2, 1), T_2(2, 1, 2), T_3(1, 2, 2)$, \max u $T_4(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}), T_5(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3}), T_6(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3})$.

