

Zadaci za vježbu (uz komentare i neka rješenja):

Intervali monotonosti i ekstremi; intervali konveksnosti i konkavnosti i točke pregiba (infleksije); crtanje kvalitativnog grafa funkcije

1. Zadana je funkcija $f(x) = x^3 \cdot \sqrt{1-x^2}$. Odrediti njene ekstreme i skicirati njen graf.

Rješenje (djelomično): $D(f) = [-1, 1]$. Funkcija f ima maksimalnu vrijednost za $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, a minimalnu za $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Neka je $y = 2 \sin x + \sin(2x)$, $x \in [0, 2\pi]$. Odrediti ekstreme i nacrtati sliku!

Rješenje (djelomično): Funkcija f ima maksimalnu vrijednost za $x = \frac{\pi}{3}$, a minimalnu za $x = \frac{5\pi}{3}$.

3. U lik omeđen krivuljom $y = x^2$ i $y = 1$ upisati pravokutnik čije su stranice paralelne koordinatnim osima tako da mu je ploština maksimalna. Koliko iznosi ta ploština?

Rješenje: $P_{MAX} = \frac{4}{3\sqrt{3}}$.

4. U kružnicu polumjera r upisan je trapez čija je dulja osnovica promjer kružnice, tako da mu je

a) opseg maksimalan. Koliko iznosi taj opseg?

Rješenje: $O_{MAX} = 5r$.

b) ploština maksimalna. Koliko iznosi ta ploština?

Rješenje: $P_{MAX} = \frac{3r^2\sqrt{3}}{4}$.

5. Naći točku P na krivulji $y = \frac{1}{x^2}$, $x > 0$, u kojoj će tangenta na krivulju imati najkraći odsječak između koordinatnih osi.

Rješenje: $P(\sqrt{2}, \frac{1}{2})$.

Napomena: U svim zadacima gdje treba odrediti ekstrem neke funkcije, potrebno je dokazati da se radi o ekstremu (maksimumu, odnosno minimumu).

Odrediti područje definicije, ispitati ponašanje na rubu područja definicije, naći intervale monotonosti i lokalne ekstreme, te asimptote i nacrtati kvalitativni graf funkcije (**ne traže se intervali konveksnosti i konkavnosti**):

6. $f(x) = \frac{1}{e^{2x} - 2e^x + 2}$,

Rješenje (djelomično): Funkcija f strogo raste na $(-\infty, 0)$ i strogo pada na $(0, \infty)$, pa ima maksimum za $x = 0$. Lijeva horizontalna asimptota je $y = \frac{1}{2}$, a desna horizontalna je $y = 0$.

7. $f(x) = \ln(2e^x - 1)$,

Rješenje (djelomično): $D(f) = (-\ln 2, \infty)$. Pravac $x = -\ln 2$ je vertikalna asimptota, a desna kosa asimptota je $y = x + \ln 2$. Funkcija f strogo raste na svojoj domeni.

8. $f(x) = e^{\frac{1}{x^2-1}}$,

Rješenje (djelomično): $D(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$. f je parna.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \infty$. U točki $x = 0$ funkcija ima lokalni maksimum. Ostali podaci slijede iz parnosti funkcije f . (naravno, iz navedenog slijedi da su $x = -1$ i $x = 1$ vertikalne asimptote, a $y = 1$ horizontalna asimptota.)

9. $f(x) = (x+2)e^{\frac{1}{x}}$,

Rješenje (djelomično): $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$, pa je pravac $x = 0$ vertikalna asimptota. Pravac $y = x + 3$ je kosa asimptota grafa funkcije f . Funkcija ima lokalni maksimum za $x = -1$ i lokalni minimum za $x = 2$.

10. $f(x) = x + 2 \operatorname{arctg}(\frac{1}{x})$,

Rješenje (djelomično): $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\pi$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \pi$. Pravac $y = x - \pi$ je lijeva, a pravac $y = x + \pi$ desna kosa asimptota grafa funkcije f . Funkcija ima lokalni maksimum za $x = -1$ i lokalni minimum za $x = 1$.

Odrediti područje definicije, ispitati ponašanje na rubu područja definicije, naći intervale monotonosti i lokalne ekstreme, **intervale konveksnosti i konkavnosti i točke pregiba (infleksije)**, te asimptote i nacrtati kvalitativni graf funkcije:

11. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$,

Rješenje (djelomično): Funkcija je strogo konveksna na $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ i $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty)$, a strogo konkavna na $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.

12. $f(x) = e^{-x^2}$,

Rješenje (djelomično): Funkcija je strogo konveksna na $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ i $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty)$, a strogo konkavna na $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

13. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\ln^2 x}$.

Rješenje (djelomično): $D(f) = (0, 1) \cup (1, \infty)$. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$. Zato je pravac $x = 1$ horizontalna asimptota. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ i graf funkcije nema kosu asimptotu. Lokalni minimum se postiže za $x = e^4$, a točke infleksije (pregiba) su $x = e^{-\sqrt{24}}$ i $x = e^{\sqrt{24}}$.

Integrali

Izračunati

1. $\int_0^1 \arcsin x dx$,

Rješenje: $\frac{\pi}{2} - 1$.

2. $\int_0^2 x^3 \cdot \sqrt{2x^2 + 1} dx$,

Naputak. Supst. $t = 2x^2 + 1$.

3. $\int_0^1 x \ln(x^2 + 1) dx$,

Rješenje: $\ln 2 - \frac{1}{2}$.

4. $\int_0^1 e^{-\sqrt{x}} dx$,

Rješenje: $2 - 4e^{-1}$ (supst. $t = \sqrt{x}$, te potom parcijalna integracija).

5. $\int_0^\infty \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx$,

Rješenje: $\frac{\pi}{4}$. (supst. $t = e^x$)

6. $\int_0^\infty x^3 e^{-x^2} dx$,

Rješenje: $\frac{1}{2}$. (supst. $t = x^2$, te potom parcijalna integracija).

7. $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$,

Rješenje: 1. (supst. $x = \operatorname{sh} t$)

8. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^3 x} dx$,

Rješenje: $\frac{1}{2}$. (supst. $t = \operatorname{ch} x$ ili $t = \operatorname{th} x$)

9. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 x \cdot \cos^6 x dx,$

Naputak. Supst. $\cos x = t.$

11. $\int_0^1 x^2 \cdot \sqrt{4-x^2} dx,$

Naputak. Supst. $x = 2 \sin t.$

12. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^5+1}{x^6+x^4} dx,$

Rješenje: $\frac{8}{9\sqrt{3}} - \frac{2}{3} + \frac{\pi}{12} + \frac{\ln 2}{2}.$

13. $\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+x+1} dx,$

Rješenje: $\frac{\pi}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{2}.$

14. $\int_1^4 \frac{\sqrt{x+2}}{x-4\sqrt{x+5}} dx,$

Rješenje: $2 - 6 \ln 2 + \frac{7\pi}{2}.$ (supstitucijom $t = \sqrt{x}$ podintegralna funkcija postaje racionalna)

Primjedba. Prvotno smo objavili zadatak s gornjom granicom 2 umjesto 4.

15. $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x}{\sqrt{2x-x^2}} dx,$

Rješenje: $\frac{\pi}{6} - 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}.$

16. $\int_0^1 e^{-x} \cdot \sin(\pi x) dx,$

Naputak. Parcijalna integracija (dva puta).

17. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x) \cdot \sin(5x) dx.$

Naputak. Rastaviti umnožak sinusa u razliku kosinusa.

Primjena integrala

Izračunati ploštinu lika omeđenog...

1...parabolom $y^2 = 4x$ i pravcem $y = 2x - 4.$

Rješenje: $P = \int_{-2}^4 (\frac{y+4}{2} - \frac{y^2}{4}) dy = \dots = 9.$

2...krivuljama $y = \frac{1}{x^2+1}$ i $y = \frac{x^2}{2}.$

Rješenje: $P = \int_{-1}^1 (\frac{1}{x^2+1} - \frac{x^2}{2}) dx = \dots = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}.$

3...krivuljama $y = \sin x$ i $y = \cos x$ između dviju susjednih točaka njihovog presjeka.

Rješenje: $P = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin x - \cos x) dx = \dots = 2\sqrt{2}.$

4...krivuljom $y = \arccos x$ i koordinatnim osima.

Rješenje: $P = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos y dy = \dots = 1.$

5...krivuljom $y = \ln x, y = \ln(4-x)$ i osi $x.$

Rješenje: $P = \int_1^2 \ln x dx + \int_2^3 \ln(4-x) dx = \dots = 2(\ln 4 - 1).$

6...krivuljom $y = \ln(x^2 + \frac{3}{4}e^2)$ i pravcem $y = 2.$

Rješenje: $P = \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} (2 - \ln(x^2 + \frac{3}{4}e^2)) dx = 2 \int_0^{\frac{e}{2}} (2 - \ln(x^2 + \frac{3}{4}e^2)) dx =$
 $= 2e - 2 \int_0^{\frac{e}{2}} \ln(x^2 + \frac{3}{4}e^2) dx = \dots = 2e(1 - \frac{\sqrt{3}}{6}\pi).$

Izračunati duljinu luka...

7...parabole $y = x^2$ između točaka s apscisom $x = 0$ i $x = 1.$

Rješenje: $s = \int_0^1 \sqrt{1+4x^2} dx.$

Taj se integral može izračunati na više načina, npr. supstitucijom $x = \frac{1}{2} \text{ sht}$.

Izračunati volumen tijela koji nastaje vrtnjom lika...

8... omeđenog krivuljom $y = x^2 + 1$ i pravcem $y = 2$

a) oko osi x ,

$$\text{Rješenje: } V = \pi \int_{-1}^1 (2^2 - (x^2 + 1)^2) dx = \dots = \frac{64\pi}{15}.$$

b) oko osi y .

$$\text{Rješenje: } V = 2\pi \int_0^1 x(2 - (x^2 + 1)) dx = \dots = \frac{\pi}{2}$$

ili

$$V = \pi \int_1^2 (\sqrt{y-1})^2 dy = \dots = \frac{\pi}{2}.$$