

### Zadaci za vježbu iz gradiva trećeg ciklusa:

**Intervali monotonosti i ekstremi; intervale konveksnosti i konkavnosti i točke pregiba (infleksije); crtanje kvalitativnog grafa funkcije**

1. Zadana je funkcija  $f(x) = x^3 \cdot \sqrt{1-x^2}$ . Odrediti njene ekstreme i skicirati njen graf.

2. Neka je  $y = 2 \sin x + \sin(2x)$ ,  $x \in [0, 2\pi]$ . Odrediti ekstreme i nacrtati sliku!

3. U lik omeđen krivuljom  $y = x^2$  i  $y = 1$  upisati pravokutnik čije su stranice paralelne koordinatnim osima tako da mu je ploština maksimalna. Koliko iznosi ta ploština?

4. U kružnicu polumjera  $r$  upisan je trapez čija je dulja osnovica promjer kružnice, tako da mu je

a) opseg maksimalan. Koliko iznosi taj opseg?

b) ploština maksimalna. Koliko iznosi ta ploština?

5. Naći točku  $P$  na krivulji  $y = \frac{1}{x^2}$ ,  $x > 0$ , u kojoj će tangenta na krivulju imati najkraći odsječak između koordinatnih osi.

Odrediti područje definicije, ispitati ponašanje na rubu područja definicije, naći intervale monotonosti i lokalne ekstreme, te asimptote i nacrtati kvalitativni graf funkcije (**ne traže se intervale konveksnosti i konkavnosti**):

6.  $f(x) = \frac{1}{e^{2x} - 2e^x + 2}$ ,

7.  $f(x) = \ln(2e^x - 1)$ ,

8.  $f(x) = e^{\frac{1}{x^2-1}}$ ,

9.  $f(x) = (x+2)e^{\frac{1}{x}}$ ,

10.  $f(x) = x + 2\arctg(\frac{1}{x})$ ,

Odrediti područje definicije, ispitati ponašanje na rubu područja definicije, naći intervale monotonosti i lokalne ekstreme, **intervale konveksnosti i konkavnosti i točke pregiba (infleksije)**, te asimptote i nacrtati kvalitativni graf funkcije:

11.  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ,

12.  $f(x) = e^{-x^2}$ ,

13.  $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\ln^2 x}$ .

### Integrali

Izračunati

1.  $\int_0^1 \arcsin x dx$ ,

2.  $\int_0^2 x^3 \cdot \sqrt{2x^2 + 1} dx$ ,

3.  $\int_0^1 x \ln(x^2 + 1) dx$ ,

4.  $\int_0^1 e^{-\sqrt{x}} dx$ ,

5.  $\int_0^\infty \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx$ ,

6.  $\int_0^\infty x^3 e^{-x^2} dx$ ,

7.  $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$ ,

8.  $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^3 x} dx$ ,

9.  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 x \cdot \cos^6 x dx$ ,

11.  $\int_0^1 x^2 \cdot \sqrt{4-x^2} dx,$
12.  $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^5+1}{x^6+x^4} dx,$
13.  $\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+x+1} dx,$
14.  $\int_1^4 \frac{\sqrt{x+2}}{x-4\sqrt{x+5}} dx,$
15.  $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x}{\sqrt{2x-x^2}} dx,$
16.  $\int_0^1 e^{-x} \cdot \sin(\pi x) dx,$
17.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x) \cdot \sin(5x) dx.$

### Primjena integrala

Izračunati ploštinu lika omeđenog...

1...parabolom  $y^2 = 4x$  i pravcem  $y = 2x - 4$ .

2...krivuljama  $y = \frac{1}{x^2+1}$  i  $y = \frac{x^2}{2}$ .

3...krivuljama  $y = \sin x$  i  $y = \cos x$  između dviju susjednih točaka njihovog presjeka.

4...krivuljom  $y = \arccos x$  i koordinatnim osima.

5...krivuljom  $y = \ln x$ ,  $y = \ln(4-x)$  i osi  $x$ .

6...krivuljom  $y = \ln(x^2 + \frac{3}{4}e^2)$  i pravcem  $y = 2$ .

Izračunati duljinu luka...

7...parabole  $y = x^2$  između točaka s apscisom  $x = 0$  i  $x = 1$ .

Izračunati volumen tijela koji nastaje vrtnjom lika...

8...omeđenog krivuljom  $y = x^2 + 1$  i pravcem  $y = 2$

a) oko osi  $x$ ,

b) oko osi  $y$ .