Druga školska zadaća iz Matematike 1, grupe 7 i 9 13. 10. 2006.

Grupa A

1. Izračunajte

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^3+2n^2}-n).$$

2. Neka je niz (a_n) zadan rekurzivno

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{5a_n}.$$

Dokažite da je niz (a_n) konvergentan i nađite njegov limes.

3. Izračunajte

$$\lim_{x\to 1-} e^{\frac{1}{x^2-1}}.$$

4. Izračunajte

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-3}{x} \arcsin\frac{1}{x}.$$

Druga školska zadaća iz Matematike 1, grupe 7 i 9 13. 10. 2006.

Grupa B

1. Izračunajte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n-\sqrt[3]{7n^3+8}}{n+\sqrt{n^2+5}}.$$

2. Izračunajte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1\ +\ 2\ +\ 3\ +\ \ldots\ +\ 2n\ +\ (2n+1)}{\sqrt{2}\cdot n^2-\sqrt[3]{4}\cdot n+123}.$$

3. Izračunajte

$$\lim_{x\to 2}\left(x^2-3\right)^{\frac{23}{x-2}}.$$

4. Odredite parametar a tako da sljedeća funkcija bude neprekinuta u točki 0 :

$$f(x) = \begin{cases} a, & \text{ako je } x = 0; \\ \frac{\cos x - 1}{x^2}, & \text{ako je } x \neq 0. \end{cases}$$

Rješenja

Grupa A

1.

2.

3.

4.

Grupa B

1.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n-\sqrt[3]{7n^3+8}}{n+\sqrt{n^2+5}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n-\sqrt[3]{7n^3+8}}{n+\sqrt{n^2+5}}\ :\ \frac{n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\sqrt[3]{7+8/n^3}}{1+\sqrt{1+5/n^2}}=\frac{3-\sqrt[3]{7}}{1+1}\ =$$

$= \frac{3-\sqrt[3]{7}}{2}$

2.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5\ +\ 6\ +\ \ldots\ +\ 2n\ +\ (2n+1)}{\sqrt{2}\cdot n^2-\sqrt[3]{4}\cdot n+123}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(2n+1)(2n+2)}{2}-(1+2+3+4)}{\sqrt{2}\cdot n^2-\sqrt[3]{4}\cdot n+123}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(2n+2)-20}{2(\sqrt{2}\cdot n^2-\sqrt[3]{4}\cdot n+123)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(2n+2)-20}{2(\sqrt{2}\cdot n^2-\sqrt[3]{4}\cdot n+123)}\ :\ \frac{n^2}{n^2}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2+1/n)(2+2/n)-20/n^2}{2(\sqrt{2}-\sqrt[3]{4}/n+123/n^2)}=\frac{4}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

3. 3. zadatak

$$\lim_{x\to2}\left(x^2-3\right)^{\frac{23}{x-2}}=(1^\infty)=\lim_{x\to2}\left(1+(x^2-4)\right)^{\frac{23}{x-2}}=\lim_{x\to2}\left(1+(x^2-4)\right)^{\frac{1}{x^2-4}\cdot\frac{23(x^2-4)}{x-2}}=$$

$$\lim_{x\to2}\left(1+(x^2-4)\right)^{\frac{1}{x^2-4}\cdot 23(x+2)}=e^{92}$$

4.

$$a=\lim_{x\to\pi/3}\frac{\cos(x-\frac{\pi}{3})-1}{(x-\frac{\pi}{3})^2}=\lim_{x\to\pi/3}\frac{-2\sin^2((x-\frac{\pi}{3})/2)}{(x-\frac{\pi}{3})^2}=\lim_{x\to\pi/3}-2\frac{\sin^2((x-\frac{\pi}{3})/2)}{((x-\frac{\pi}{3})/2)^2}\cdot4=-8$$