Rješenja treće školske zadaće

Grupa A

1. Površina pravokutnika je $P(y) = y(4 - y^2)$. Tražimo minimum ove funkcije na intervalu $[0, 2]$. Iz $P'(y) = 4 - 3y^2$ slijedi da se maksimum postiže u točki $y_{min} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ pa je maksimalna površina jednaka $\frac{16}{9}\sqrt{3}$.

2. Domena funkcije je $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Vrijedi da je $\lim_{x\to-2^\pm} = -\infty$ i $\lim_{x\to\pm\infty} = 0$ pa funkcija ima vertikalnu asimptotu u $x = -2$ i horizontalnu asimptotu $y = 0$. Jer je derivacija funkcije jednaka $f'(x) = -\frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)^2}$ funkcija pada na intervalima $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ i raste na $(-2, 2)$ pa u 2 postiže lokanlni (i globalni) maksimum.

3. $$\int \frac{x+8}{x^2+x-2}dx = -\int \frac{2}{x+2}dx + \int \frac{3}{x-1}dx = -2\ln|x+2| + 3\ln|x-1| + C$$

4. (a) $\int_0^{2\pi} |\sin x|dx = \int_0^{\pi} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x = 4$
(b) $\int \sin^3 x \cos^2 x dx = \int (1 - \cos^2 x) \cos^2 x \sin x dx = [\cos x = t, -\sin x dx = dt] = -\int t^2 - t^4 dt = -\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} = -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5}$, $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^3 x \cos^2 x dx = \frac{1}{480}(64 - 33\sqrt{3})$.

Grupa B

1. Površina pravokutnika je $P(x) = x(9 - x^2)$. Tražimo minimum ove funkcije na intervalu $[0, 3]$. Iz $P'(x) = 9 - 3x^2$ slijedi da se maksimum postiže u točki $x_{min} = \sqrt{3}$ pa je maksimalna površina jednaka $6\sqrt{3}$.

2. Domena funkcije je $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Vrijedi da je $\lim_{x\to0^-} = -\infty$, $\lim_{x\to0^+} = +\infty$ i da postoji kosa asimptota $y = x + 4$. Jer je derivacija funkcije jednaka $f'(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x^2}$ funkcija raste na intervalima $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ i pada na $(-2, 0) \cup (0, 2)$ pa u -2 postiže lokalni maksimum, a u 2 lokalni minimum.

3. $$\int \frac{x+1}{x^2+5x+6}dx = -\int \frac{1}{x+2}dx + \int \frac{2}{x+3}dx = 2\ln|x+3| - \ln|x+2| + C$$

4. (a) $\int_0^{\pi} |\cos x|dx = \int_0^{\pi/2} \cos x dx - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos x dx = 2$
(b) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx = \int \frac{(1-\sin^2 x)}{\sin^4 x} \cos x dx = [\sin x = t, \cos x dx = dt] = \int -t^{-2} + t^{-4} dt = t^{-1} - \frac{t^{-3}}{3} = \sin^{-1} x - \frac{\sin^{-3} x}{3}$, $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx = \frac{1}{27}(-9\sqrt{2} + 10\sqrt{3})$.