

3. DOMAĆA ZADAĆA IZ MATEMATIKE 1

1. Odredi sve matrice \mathbf{X} za koje vrijedi $\mathbf{AX} = \mathbf{A}$, gdje je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$.

2. Riješi matricnu jednadžbu $\mathbf{X} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -4 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 6 & -8 & 2 \end{bmatrix}$.

3. Riješi matricnu jednadžbu $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

4. Postoji li matrica \mathbf{X} koja zadovoljava matricnu jednadžbu:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}?$$

5. Neka je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ i $P(x) = x^2 + 2x$. Naći sve realne brojeve a i b takve da je takve da je $P(\mathbf{A}) = 0$.

6. Odredi sve matrice koje komutiraju s matricom $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$.

7. Odredi sve matrice koje komutiraju s matricom $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

8. Odredi sve matrice drugog reda čiji je kvadrat jednak nul-matrici.

9. Izračunaj $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^n$, $n \in \mathbf{N}$.

10. Izračunaj $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 2 \end{bmatrix}^n$, $n \in \mathbf{N}$.

11. Dokaži da matrice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_n$ komutiraju ako i samo ako je $(\mathbf{A} - \mathbf{B})(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2$.

12. Dokaži ili opovrgni protuprimjerom tvrdnju: ako za matrice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_n$ vrijedi $\mathbf{A}^2 = \mathbf{B}^2$ onda je $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ ili $\mathbf{A} = -\mathbf{B}$.

13. Dokaži ili opovrgni protuprimjerom tvrdnju: Za sve matrice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_n$ vrijedi $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2$.

14. Ako su \mathbf{A} i \mathbf{B} simetrične matrice, mora li tada \mathbf{AB} biti simetrična matrica? Obrazloži!

15. Dokaži ako su \mathbf{A} i \mathbf{B} simetrične matrice, tada je i $\mathbf{AB} + \mathbf{BA}$ simetrična matrica.

16. Izračunaj determinante: a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -5 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

17. Izračunaj determinante: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$.

18. Izračunaj determinante: a) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

19. Izračunaj determinantu: $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & x & x \\ 1 & x & 0 & x & x \\ 1 & x & x & 0 & x \\ 1 & x & x & x & 0 \end{vmatrix}$.

20. Odredi sve $x \in \mathbf{R}$ za koje vrijedi

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-x & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3-x & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4-x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 6-x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7-x \end{vmatrix} = 0$$