Rješenja 1. školske zadaće, grupe 3, 7 i 9

1. zadatak

A: Baza: $1 = 1^2$. Pretpostavimo da je $n^2 = 1+3+\cdots+(2n-1)$. Tada je $1+2+3+\cdots+(2n-1)+(2n+1) = n^2+2n+1 = (n+1)^2$. QED

B: Baza: $1+3 = 4 = \frac{8}{2} = \frac{9-1}{2} = \frac{3^2-1}{2}$. Pretpostavimo da je $\frac{3^n-1}{2} = 1+3+3^2+\cdots+3^{n-1}$. Tada je $1+3+\cdots+3^{n-1}+3^n = \frac{3^n-1}{2}+3^n = \frac{3^n-1+2\cdot 3^n}{2} = \frac{3\cdot 3^n-1}{2} = \frac{3^{n+1}-1}{2}$. QED

2. zadatak

A: $z^3 = (\sqrt{3}-i)^9 = (2\operatorname{cis}(-\frac{1}{6}\pi))^9 = 2^9\operatorname{cis}(-\frac{3}{2\pi}) = 512i$. $z_k = 8\operatorname{cis}(\frac{4k-3}{6}\pi)$, pa je $z_0 = -8i$, $z_1 = 4\sqrt{3}+4i$ i $z_2 = -4\sqrt{3}+4i$.

B: $z^4 = (-1+i)^8 = (\sqrt{2}\operatorname{cis}(-\frac{3}{2}\pi))^8 = 16\operatorname{cis}(6\pi) = 16$. $z_k = 2\operatorname{cis}(\frac{2k}{4}\pi)$, pa je $z_0 = 4$, $z_1 = 4i$, $z_2 = -4$, $z_3 = -4i$.

3. zadatak

A: $\sqrt{3-\log_2(x^2-1)}$. Mora biti $\log_2(x^2-1) \leq 3$ i $x^2-1 > 0$. $x^2 > 1$ znači $x \in \langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle$. No, $\log_2(x^2-1) \leq 3$ znači $x^2-1 \leq 8$, pa je $|x| \leq 3$. To znači da je rješenje $x \in [-3,-1\rangle \cup \langle -1, 3]$.

B: $\sqrt{4-\log_2^2(x+1)}$. Mora biti $\log_2^2(x+1) \leq 4$ i $x+1 > 0$. $x > 1$ znači $x \in \langle 1, +\infty\rangle$. No, $\log_2^2(x-1) \leq 4$ znači $\frac{1}{4} \leq x-1 \leq 4$. To znači da je rješenje $x \in \left[-\frac{3}{4}, 3\right]$.

4. zadatak

A: (a) Pretpostavimo $AB = BA$. Tada je $(A-B)(A+B) = A^2+AB-BA-B^2 = A^2-B^2$. Pretpostavimo da je $A^2-B^2 = (A+B)(A-B)$. Tada je $0 = (A+B)(A-B)-(A^2-B^2) = A^2+AB-BA-B^2-A^2+B^2 = AB-BA$, pa je $AB = BA$.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a-b & a+b \\ 2c-d & c+d \end{bmatrix}$$

(b) $$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a+c & 2b+d \\ c-a & d-b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2a+c & 2b+d \\ c-a & d-b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a-b & a+b \\ 2c-d & c+d \end{bmatrix}$$

Slijedi $b = -c$ i $a = b+d$, pa je rezultat skup svih matrica oblika $\begin{bmatrix} b+d & b \\ -b & d \end{bmatrix}$, gdje su b, c realni brojevi.

B: (a) Pretpostavimo $AB = BA$. Tada je $(A+B)^2 = A^2+AB+BA+B^2 = A^2+2AB+B^2$. Pretpostavimo da je $A^2+2AB+B^2 = (A+B)^2$. Tada je $0 = (A+B)^2-(A^2+2AB+B^2) = A^2+AB+BA+B^2-A^2-2AB-B^2 = BA-AB$, pa je $AB = BA$.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b & 2b-a \\ c+d & 2d-c \end{bmatrix}$$

(b) $$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-c & b-d \\ a+2c & b+2d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a-c & b-d \\ a+2c & b+2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b & 2b-a \\ c+d & 2d-c \end{bmatrix}$$

Slijedi $b = -c$ i $a = d-b$, pa je rezultat skup svih matrica oblika $\begin{bmatrix} d-b & b \\ -b & d \end{bmatrix}$, gdje su b, c realni brojevi.