

Grupe: 1,3,5 – A

1. $\frac{1}{6} = \frac{1}{2(1+2)=\frac{1}{6}}$, pa smo provjerili bazu, $n = 1$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 + 3k + 2} = \frac{n}{2(n+2)}.$$

Računamo:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2 + 3k + 2} &= \frac{n}{2(n+2)} + \frac{1}{(n+1)^2 + 3(n+1) + 2} \\ &= \frac{n}{2(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} \\ &= \frac{n^2 + 3n + 2}{2(n+2)(n+3)} \\ &= \frac{(n+2)(n+1)}{2(n+2)(n+3)} \\ &= \frac{(n+1)}{2(n+3)}. \end{aligned}$$

Pokazali smo da pretpostavka da tvrdnja vrijedi za $k = n$ povlači da tvrdnja vrijedi za $k = n + 1$, pa iz toga i baze zaključujemo da tvrdnja vrijedi za sve $n \in \mathbb{N}$.

2. $z = e^{\frac{1}{3}i\pi}$, $z^{29} = e^{\frac{29}{3}i\pi} = e^{\frac{5}{3}i\pi}$.

3.

$$\begin{aligned} X &:= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\ A &:= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\ AX &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b & a \\ -d & c \end{bmatrix} \\ XA &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ -a & -b \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Zaključujemo da A mora biti oblika

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

za sve $a, b \in \mathbb{R}$.

4.

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 2 & -4 & -1 \\ -2 & 5 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 & 7 \\ 3 & -1 & -5 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \text{puno posla} = 1032.$$

Grupe: 1,3,5 – B

1. $\frac{1}{2} = 2 - \frac{1+2}{2^1}$, pa smo provjerili bazu, $n = 1$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

Računamo:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} &= 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \\ &= 2 - \frac{2n+4-n-1}{2^{n+1}} \\ &= 2 - \frac{(n+1)+2}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

Pokazali smo da pretpostavka da tvrdnja vrijedi za $k = n$ povlači da tvrdnja vrijedi za $k = n + 1$, pa iz toga i baze zaključujemo da tvrdnja vrijedi za sve $n \in \mathbb{N}$.

2. $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{\frac{2}{3}i\pi}$. $w^4 = z$, pa je $w_{1,2,3,4} = e^{\frac{1+3k}{6}i\pi}$, za $k = 0, 1, 2, 3$.

3.

$$\begin{aligned} X &:= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ Y &:= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ A &:= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\ AX &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -a \\ c & -c \end{bmatrix} \\ YA &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Zaključujemo da A mora biti oblika

$$A = \begin{bmatrix} a & -a \\ 0 & d \end{bmatrix}$$

za sve $a, d \in \mathbb{R}$.

4.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & -3 \\ 2 & 4 & 5 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \text{puno posla} = -9.$$

Grupe: 2,4,6 – A

1. (a) Injekcija je funkcija koja svakom paru različitih elemenata domene pridružuje različite elemente kodomene, tj. za funkciju $f : D \rightarrow K$ vrijedi

$$(\forall x, y \in D) \quad x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y).$$

(b) Postoji injekcija iz A u B jer A ima manje elemenata, pa je moguće različitim pridružiti različite. Obrat ne vrijedi, po istom argumentu.

2.

$$\begin{aligned} z^3 &= (1 - \sqrt{3}i)^5 (\sqrt{3} + i) = 64 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)^4 \\ &= 64e^{\frac{2\pi}{3}i} \\ z &= 4e^{\frac{6k+2}{9}\pi i}, \text{ za } k = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} X &:= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\ A &:= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\ AX &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & a+2b \\ c & c+2d \end{bmatrix} \\ XA &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & 2c \\ b+d & 2d \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Zaključujemo da A mora biti oblika

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{bmatrix}$$

za sve $a, b \in \mathbb{R}$.

4.

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \text{puno posla} = 2.$$

Grupe: 2,4,6 – B

1. (a) Surjekcija je funkcija kojoj je slika jednaka kodomeni, tj. za funkciju $f : D \rightarrow K$ vrijedi

$$(\forall y \in K)(\exists x \in D) \quad f(x) = y$$

(b) Postoji surjekcija iz B u A jer A ima manje elemenata, pa je moguće pogoditi svaki element. Obrat ne vrijedi, po istom argumentu.

2.

$$\begin{aligned} z^3 &= (\sqrt{3} - i)^5 (\sqrt{3} + i) = 64 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right)^4 \\ &= 64e^{-\frac{2\pi}{3}i} \\ z &= 4e^{\frac{6k-2}{9}\pi i}, \text{ za } k = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} A &:= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ X &:= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\ AX &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a & a+b \\ 2c & c+d \end{bmatrix} \\ XA &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a+c & c \\ 2b+d & d \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Zaključujemo da A mora biti oblika

$$X = \begin{bmatrix} b+d & b \\ 0 & d \end{bmatrix}$$

za sve $b, d \in \mathbb{R}$.

4.

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \text{puno posla} = 48.$$

Grupe: 7,9 – A

1. $1 = \frac{1-x^1}{1-x}$, pa smo provjerili bazu, $n = 0$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

Računamo:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} x^k &= \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1} \\ &= \frac{1-x^{n+1} + x^{n+1} - x^{n+2}}{1-x} \\ &= \frac{1-x^{n+2}}{1-x} \end{aligned}$$

Pokazali smo da pretpostavka da tvrdnja vrijedi za $k = n$ povlači da tvrdnja vrijedi za $k = n + 1$, pa iz toga i baze zaključujemo da tvrdnja vrijedi za sve $n \in \mathbb{N}$.

2. $z^4 = \bar{z}(1-i)$. Zaključujemo da je $|z|^4 = |z|\sqrt{2}$, tj. $r = \sqrt[5]{2}$ ili $r = 0$. Iz $z^5 = |z|^2(1-i)$ zaključujemo da je $\arg z^5 = \frac{7\pi}{4}$, tj. $\arg z = \frac{1}{20}(7+8k)\pi$, pa je rezultat

$$z_k = \sqrt[5]{2} e^{\frac{1}{20}i\pi(7+8k)}, k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad z_0 = 0.$$

3.

$$\begin{aligned} A &:= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \\ A^3 &:= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 0 & -27 \end{bmatrix} \\ f(2A^T) &= 16 \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 7 & -27 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 131 & 0 \\ 114 & 439 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \text{puno posla} = 160.$$

Grupe: 7,9 – B

1. $\arg z^3 = \frac{\pi}{2}$, pa je $\arg z = \frac{1+4k}{6}\pi$. Zaključujemo da je

$$z_{1r,2r,3r} = r \left(\cos \pi \frac{1+4k}{6} + i \sin \pi \frac{1+4k}{6} \right)$$

$$z_{1r} = r \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)$$

$$z_{2r} = r - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$z_{3r} = ri.$$

Iz uvjeta $|z + 2| = 1$ zaključujemo da je $\operatorname{Re} z < 0$ (tj. $\operatorname{Re} z \leq -1$), pa jedino rješenje koje dolazi u obzir je z_{2r} .

$$1 = \frac{3}{4}r^2 - 2\sqrt{3}r + 4 + \frac{1}{4}r^2$$

$$0 = r^2 - 2\sqrt{3}r + 3$$

$$0 = (r - \sqrt{3})^2$$

Zaključujemo da je $r = \sqrt{3}$.

2. $11|66$, pa vrijedi za $n = 1$. Pretpostavimo da je $6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n = 11k$, pa je

$$\begin{aligned} 6^{2n+2} + 3^{n+3} + 3^{n+1} &= 3(12 \cdot 6^{2n+2} + 3^{n+2} + 3^n) \\ &= 3(11 \cdot 6^{2n+2} + 11k) \\ &= 3 \cdot 11 \cdot (6^n + k) \end{aligned}$$

a taj je broj djeljiv s 11, pa tvrdnja vrijedi.

3.

$$A := \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{bmatrix}$$

$$\text{Pretp.: } A^n = \begin{bmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= \begin{bmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(n+1)\alpha & -\sin(n+1)\alpha \\ \sin(n+1)\alpha & \cos(n+1)\alpha \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Indukcija provedena.

4.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix} = \text{puno posla} = 12.$$

Grupe: 8,10 – A

1. Negacija od

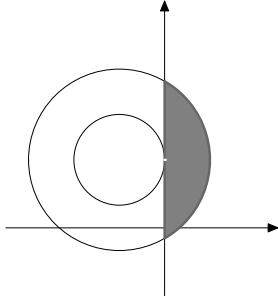
$$\forall x \exists y \quad (x < y) \wedge (xy \geq 0)$$

je sud

$$\exists x \forall y \quad (x \geq y) \vee (xy < 0).$$

Istinit je prvi sud, jer ako je $x < 0$, tada uzmemo $y = \frac{x}{2}$, pa je tada $x < y$ i $xy \geq 0$. Kada je $x \geq 0$, tada uzmemo $y = x + 1$.

2. $A := \{z \in \mathbb{C}; 2 < |z + 2 - 3i| \leq 4 \wedge \operatorname{Re} z \geq 0\}$. To je dio kružnog vijenca oko $-2 + 3i$ s malim radijusom 2 i velikim radijusom 4, desno od imaginarne osi:



$|z + 2 - 3i| = 4 \wedge \operatorname{Re} z = 0$ – to su sjecišta vanjske kružnice sa imaginarnom osi, dakle točke $z_{12} = (3 \pm 2\sqrt{3})i$.

3.

$$A := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A$$

Pretpostavimo: $A^n \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$A^{n+1} = A^n A = AA = A^2 = A$$

Indukcijom pokazano.

4.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \operatorname{tg} \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & 0 & 1 \\ 1 & \sin \alpha & 1 & 0 \end{vmatrix} = \text{puno posla} = 2 \sin \alpha - 1.$$

Stoga je $-2 = 2 \sin \alpha - 1$, tj. $\alpha \in \left\{ \frac{-\pi}{6} + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Grupe: 8,10 – B

1. Negacija od

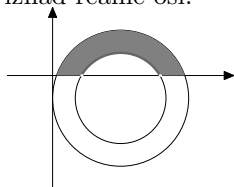
$$\exists x \forall y (x \leq y) \vee (xy > 0)$$

je sud

$$\forall x \exists y (x > y) \wedge (xy \leq 0).$$

Istinit je prvi sud, jer za $x = -1$ zbilja svaki y zadovoljava da je ili veći od njega, ili su u produktu veći od 0 (a može biti i oboje).

2. $A := \{z \in \mathbb{C}; 2 \leq |z - 3 + i| < 3 \wedge \operatorname{Im} z > 0\}$, što je dio kružnog vijenca kružnica radijusa 2 i 3 oko točke $3 - i$, iznad realne osi.



Točke za koje vrijedi $\operatorname{Im} z = 0$ i $|z - 3 + i| = 2$ su sjecišta imaginarne osi i unutarnje kružnice na ovoj slici, pa su to, dakle, točke $3 \pm \sqrt{3}$.

3.

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = A$$

$$\text{Pretp.: } A^n \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{n+1} = A^n A = AA = A^2 = A$$

Indukcijom pokazano.

4.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \sin \alpha \\ 1 & 0 & 1 & \cos \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \operatorname{ctg} \alpha & 0 & 1 \end{vmatrix} = \text{puno posla} = 2 \sin \alpha - 1.$$

Stoga je $-2 = 2 \cos \alpha - 1$, tj. $\alpha \in \left\{ \frac{-2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{6} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$.