Rješenja prve školske zadaće iz Matematike 1 za grupe 2 i 6

29.09.2008.

Grupa A

1. Matematičkom indukcijom dokažite da za svaki prirodni broj n vrijedi

$$1^2 + 4^2 + 7^2 + \ldots + (3n-2)^2 = \frac{n(6n^2-3n-1)}{2}.$$

Rješenje.

Baza: $1 = \frac{1\cdot(6-3-1)}{2}$

Pretpostavimo da za neki prirodni broj n vrijedi

$$1^2 + 4^2 + 7^2 + \ldots + (3n-2)^2 = \frac{n(6n^2-3n-1)}{2}.$$

Tada po pretpostavci indukcije slijedi

$$\begin{aligned} 1^2 + 4^2 + \ldots + (3n-2)^2 + (3n+1)^2 &= \frac{n(6n^2-3n-1)}{2} + (3n+1)^2 = \ldots \\ &= \frac{(n+1)(6(n+1)^2 - 3(n+1) - 1)}{2}. \end{aligned}$$

2. U skupu kompleksnih brojeva riješite jednadžbu:

$$z^3 + z^{-3} = i.$$

Rješenje.

Množenjem sa z^3 dobijemo

$$z^6 - iz^3 + 1 = 0,$$

odakle je

$$z^3 = \frac{(1 \pm \sqrt{5})i}{2}$$

pa je

$$z_{1,2,3} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right),\ k = 0,1,2,$$

i

$$z_{4,5,6} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right),\ k = 0,1,2.$$

3. (b) Odredite prirodno područje definicije (domenu) funkcije

$$g(x) = \arccos(1 + \mathrm{th}x).$$

Je li g monotona funkcija? Kako to možemo zaključiti na temelju svojstava funkcija čijom kompozicijom je zadana g?

Rješenje.

(b) $-1 \leq 1 + \mathrm{th}x \leq 1 \implies -1 < \mathrm{th}x \leq 0 \implies x \leq 0$ pa je $D_f = \langle -\infty, 0]$.

$x \mapsto \arccos x$ je padajuća i $x \mapsto 1 + \mathrm{th}x$ je rastuća pa je njihova kompozicija padajuća.

4. Neka je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Odredite sve matrice $\mathbf{X}$ koje komutiraju s matricom $\mathbf{A}$ pri množenju.

Rješenje.

Neka je

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Tada iz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dobijemo

$$\begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 2a \\ c & 2c \end{bmatrix},$$

odakle je $c = 0$ i $b = 2a - 2d$ pa su sve matrice koje komutiraju s $\mathbf{A}$ oblika

$$\begin{bmatrix} a & 2a-2d \\ 0 & d \end{bmatrix}, \ a, d \in \mathbb{R}$$

Grupa B

1. Matematičkom indukcijom dokažite da za svaki prirodni broj n vrijedi

$$2^2 + 5^2 + 8^2 + \ldots + (3n-1)^2 = \frac{n(6n^2+3n-1)}{2}.$$

Rješenje.

Baza: $4 = \frac{1 \cdot (6+3-1)}{2}$

Pretpostavimo da za neki prirodni broj n vrijedi

$$2^2 + 5^2 + 8^2 + \ldots + (3n-1)^2 = \frac{n(6n^2+3n-1)}{2}.$$

Tada po pretpostavci indukcije slijedi

$$\begin{aligned} 2^2 + 5^2 + \ldots + (3n-1)^2 + (3n+2)^2 &= \frac{n(6n^2+3n-1)}{2} + (3n+2)^2 = \ldots \\ &= \frac{(n+1)(6(n+1)^2 + 3(n+1) - 1)}{2}. \end{aligned}$$

2. U skupu kompleksnih brojeva riješite jednadžbu:

$$z^3 + z^{-3} = -i.$$

Rješenje.

Množenjem sa z^3 dobijemo

$$z^6 + iz^3 + 1 = 0,$$

odakle je

$$z^3 = \frac{(-1 \pm \sqrt{5})i}{2}$$

pa je

$$z_{1,2,3} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right), \ k = 0,1,2,$$

i

$$z_{4,5,6} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right), \ k = 0,1,2.$$

3. (a) Je li $f(x) = \mathrm{ch}x - 1$ injekcija? Obrazložite.
   (b) Odredite prirodno područje definicije (domenu) funkcije

$$g(x) = \ln(\mathrm{ch}x - 1).$$

   Rješenje.
   (a) f nije injekcija, jer je npr. $f(1) = f(-1)$.
   (b) $\mathrm{ch}x - 1 > 0 \implies \mathrm{ch}x > 1 \implies x \neq 0$ pa je $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

4. Neka je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

   Odredite sve matrice $\mathbf{X}$ koje komutiraju s matricom $\mathbf{A}$ pri množenju.
   Rješenje.
   Neka je

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

   Tada iz

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

   dobijemo

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a+2c & b+2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & 2b \\ d & 2d \end{bmatrix},$$

   odakle je $b = 0$ i $c = \frac{d-a}{2}$ pa su sve matrice koje komutiraju s $\mathbf{A}$ oblika

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ \frac{d-a}{2} & d \end{bmatrix}, \ a, d \in \mathbb{R}$$