Rješenja prve školske zadaće iz Matematike 1 za grupe 2 i 6

10.11.2008.

Grupa A

1. (a) Napišite definiciju gomilišta niza.

   (b) Postoji li konvergentan niz koji ima 3 gomilišta? Objasnite!

   Rješenje.

   (a) $A \in \mathbb{R}$ je gomislište niza realnih brojeva (a_n) ako se u svakoj okolini od A nalazi beskonačno mnogo članova niza (a_n).

   (b) Pretpostavimo da niz (a_n) ima tri (različita) gomilišta A_1, A_2 i A_3. Odaberimo disjunktne okoline $V(A_1), V(A_2), V(A_3)$ od A_1, A_2 i A_3 redom. Tada se u svakoj okolini nalazi beskonačno mnogo članova niza pa niz ne može biti konvergentan.

2. Izračunajte:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+3+5+\ldots+(2n+1)}{1+n^2}.$$

   Rješenje.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+3+5+\ldots+(2n+1)}{1+n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{2}(1+(2n+1))}{1+n^2} = 1.$$

3. Izračunajte
$$\text{(a)} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+\frac{1}{2}}{n-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{n}{2}} \qquad \text{(b)} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+\frac{1}{2}}{n^2-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

   Rješenje.

   (a)
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+\frac{1}{2}}{n-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{n}{2}} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n-\frac{1}{2}}\right)^{n-\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left(1+\frac{1}{n-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}} =$$
$$= e^{\frac{1}{2}} \cdot 1 = \sqrt{e}.$$

   (b)
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+\frac{1}{2}}{n^2-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{n}{2}} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n^2-\frac{1}{2}}\right)^{n^2-\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2n}} \cdot \left(1+\frac{1}{n-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4n}} =$$
$$= e^{0} \cdot 1 = 1.$$

4. (a) Izračunajte
$$\lim_{x\to 4-} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{x-4}\right)^2.$$

(b) Postoji li

$$\lim_{x\to 4} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{x-4}\right)^2?$$

Objasnite.

Rješenje.

(a)

$$\lim_{x\to 4-} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{x-4}\right)^2 = \frac{\pi}{2}.$$

(b)

$$\lim_{x\to 4+} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{x-4}\right)^2 = \frac{\pi}{2}.$$

Dakle, jednostrani limesi postoje i jednaki su pa postoji i limes i

$$\lim_{x\to 4} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{x-4}\right)^2 = \frac{\pi}{2}.$$

Grupa B

1. (a) Napišite definiciju limesa niza.

   (b) Postoji li konvergentan niz koji nije monoton? Objasnite!

   Rješenje.

   (a) $L \in \mathbb{R}$ je limes niza realnih brojeva (a_n) ako se izvan svake okoline od L nalazi najviše konačno mnogo članova niza (a_n).

   (b) Da. Naprimjer, $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ je konvergentan niz, ali nije monoton.

2. Izračunajte:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+7^n}{1+7+7^2+\ldots+7^n}.$$

   Rješenje.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+7^n}{1+7+7^2+\ldots+7^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+7^n}{\frac{1-7^{n+1}}{1-7}} = 6\lim_{n\to\infty} \frac{7^n+1}{7^{n+1}-1} = \frac{6}{7}.$$

3. Izračunajte

$$\text{(a)} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+\frac{1}{3}}{n-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{n}{3}} \qquad \text{(b)} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+\frac{1}{3}}{n^2-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{n}{3}}.$$

   Rješenje.

   (a)

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+\frac{1}{3}}{n-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{n}{3}} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n-\frac{2}{3}}\right)^{n-\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{3}} \cdot \left(1+\frac{1}{n-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{9}} =$$
$$= e^{\frac{1}{3}} \cdot 1 = \sqrt[3]{e}.$$

(b)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+\frac{1}{3}}{n^2-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{n}{3}} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^2-\frac{2}{3}}\right)^{n^2-\frac{2}{3}}\right]^{\frac{1}{3n}}\cdot\left(1+\frac{1}{n^2-\frac{1}{3}}\right)^{\frac{2}{9n}} =$$
$$= e^0\cdot 1 = 1.$$

4. (a) Izračunajte
$$\lim_{x\to 1+}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{1-x}\right)^3.$$

(b) Postoji li
$$\lim_{x\to 1}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{1-x}\right)^3?$$

Objasnite.

Rješenje.

(a)
$$\lim_{x\to 1+}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{1-x}\right)^3 = -\frac{\pi}{2}.$$

(b)
$$\lim_{x\to 1-}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{1-x}\right)^3 = \frac{\pi}{2}.$$

Dakle, jednostrani limesi postoje, ali nisu jednaki pa limes ne postoji.