

Rješenje 3. školske zadaće iz Matematike1

12.01.2009. grupe 1, 5 - A podgrupa

1. Površina pravokutnika je $P(x) = 2x(9 - x^2)$, $x > 0$, stac. točke su rješenja od $P'(x) = 2(9 - 3x^2) = 0$, $\Rightarrow x = \sqrt{3}$. Iz geometrijskih razloga je očito da je to točka maximuma funkcije $P(x)$, tj. da je $P(\sqrt{3}) = P_{\max} = 12\sqrt{3}$ maksimalna površina.
2. $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$, $D_f = \langle 0, +\infty \rangle$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}}{x} = 0$. Nema kose asimptote. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}^3} = 0 \Rightarrow x = 1$. Provjeri se da je $x = 1$ minimum. Na $\langle 0, 1 \rangle$ funkcija strogo pada, desno od 1 strogo raste.
3. $\int x^2 \sin(4x) dx = \{u = x^2, du = 2x dx, dv = \sin(4x) dx, v = -\frac{\cos 4x}{4}\} = -\frac{1}{4}x^2 \cos(4x) + \frac{1}{2} \int x \cos(4x) dx = \{ \text{opet parcijalna integracija} \} = \{u = x, du = dx, dv = \cos(4x), v = \frac{1}{4} \sin(4x)\} = -\frac{1}{4}x^2 \cos(4x) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}x \sin(4x) - \frac{1}{4} \int \sin(4x) dx \right) = -\frac{1}{4}x^2 \cos(4x) + \frac{1}{8}x \sin(4x) + \frac{1}{32} \cos(4x) + C$
- 4.

$$\begin{aligned} \int_0^4 \frac{dx}{x - \sqrt{x} + 1} &= \{ \sqrt{x} = t, x = t^2, dx = 2t dt \} = \int_0^2 \frac{2t dt}{t^2 - t + 1} = \\ &= \int_0^2 \frac{(2t - 1)}{t^2 - t + 1} dt + \int_0^2 \frac{1}{(t - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dt = \ln(t^2 - t + 1) \Big|_0^2 + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2t - 1}{\sqrt{3}} \right) \Big|_0^2 = \\ &= \ln 3 + \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \right) = \ln 3 + \frac{\pi}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Rješenje 3. školske zadaće iz Matematike1

12.01.2009. grupe 1, 5 - B podgrupa

1. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+2}$, $D_f = [0, +\infty)$, $f(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, $y = 0$ je desna horizontalna asimptota. $f'(x) = \frac{2-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2} = 0 \Rightarrow x = 2$. Provjeri se da je $x = 2$ maksimum. U $x = 0$ funkcija ima minimum. Na $[0, 2)$ funkcija strogo raste, desno od 2 strogo pada.
2. Površina pravokutnika je $P(x) = 2x(1 - x^2)$, $x > 0$, stac. točke su rješenja od $P'(x) = 2(1 - 3x^2) = 0$, $\Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Iz geometrijskih razloga je očito da je to točka maximuma funkcije $P(x)$, tj. da je $P(\frac{1}{\sqrt{3}}) = P_{\max} = \frac{4}{3\sqrt{3}}$ maksimalna površina.
3. $\int x^2 e^{-x} dx = \{u = x^2, du = 2x dx, dv = e^{-x} dx, v = -e^{-x}\} = -x^2 e^{-x} + 2 \int x e^{-x} dx = \{u = x, du = dx, dv = e^{-x} dx, v = -e^{-x}\} = -x^2 e^{-x} + 2(-x e^{-x} + \int e^{-x} dx) = -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2e^{-x} + C$

4.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^3 + x}{x^2 - x + 1} dx &= \int_0^1 (x + 1) dx + \int_0^1 \frac{x - 1}{x^2 - x + 1} dx = \\ &= \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{(x - \frac{1}{2})}{x^2 - x + 1} dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dx = \\ &= \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \ln(x^2 - x + 1) \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2x - 1}{\sqrt{3}} \right) \Big|_0^1 = \frac{3}{2} + 0 + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 0 = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$