Rješenje 2. školske zadaće iz Matematike1

10.11.2008. grupe 3, 7, 9 - A podgrupa

1. Uočimo da je $a_{n+1} = \sqrt{3 + a_n}$. Dokazujemo indukcijom da je zadani niz rastući:

   - Baza: $a_1 = \sqrt{3} < \sqrt{3 + \sqrt{3}} = a_2$.
   - Korak: Pretpostavimo da vrijedi $a_n < a_{n+1}$ za neki $n \in \mathbb{N}$. Tada je $a_{n+1} = \sqrt{3 + a_n} < \sqrt{3 + a_{n+1}} = a_{n+2}$.

   Sada dokazujemo da je niz omeđen odozgo (npr. s 3). Dokaz indukcijom:

   - Baza: $a_1 = \sqrt{3} < 3$.
   - Korak: Pretpostavimo da vrijedi $a_n < 3$ za neki $n \in \mathbb{N}$. Tada je $a_{n+1} = \sqrt{3 + a_n} < \sqrt{3 + 3} < 3$.

   Sada je očito niz omeđen (odozdo je omeđen s $a_1 = \sqrt{3}$ jer je rastući), i monoton , pa je i konvergentan, tj. postoji limes $L = \lim_n a_n$. Računamo ga na sljedeći način:
   $a_{n+1} = \sqrt{3 + a_n} \quad / \lim_n \quad \Rightarrow \quad L = \sqrt{3 + L} \quad \Rightarrow \quad L^2 - L - 3 = 0$
   $\Rightarrow \quad L = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{13})$, pa jer je limes (kada postoji) jednoznačno određen i jer je $a_n \geq \sqrt{3} = a_1$,$\forall n \in \mathbb{N}$, zaključujemo da je $L = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{13})$.

2. $$\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x^2} - 1}{\sin^2(5x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{e^{3x^2}-1}{3x^2}}{\frac{\sin^2(5x)}{(5x)^2}} \frac{3x^2}{(5x)^2} = \frac{\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x^2}-1}{3x^2}}{\left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{(5x)}\right)^2} \lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{25x^2} = \frac{1}{1^2} \cdot \frac{3}{25} = \frac{3}{25}.$$

3. $$\lim_{x\to 0} \left(\frac{3x+1}{5x+1}\right)^{\frac{3}{x}} = \lim_{x\to 0} \left(1 - \frac{2x}{5x+1}\right)^{\frac{3}{x}} = \lim_{x\to 0} \left[\left(1 - \frac{2x}{5x+1}\right)^{-\frac{5x+1}{2x}}\right]^{\frac{-2x}{5x+1} \frac{3}{x}} =$$

   $$= \left[\lim_{x\to 0} \left(\left(1 - \frac{2x}{5x+1}\right)^{-\frac{5x+1}{2x}}\right)\right]^{\lim_{x\to 0} \frac{-6}{5x+1}} = e^{-6}.$$

4. (a) Funkcija f je neprekinuta u točki x_0 ako je $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. (A može, jasno, i $\varepsilon - \delta$ definicija iz knjižice 7, tj. Definicija 7. na str. 14.)

   (b) $\lim_{x\to -2-} f(x) = f(-2) = 3 - 2a^2$ mora biti jednak $\lim_{x\to -2+} f(x) = \lim_{x\to -2+} a \operatorname{th}\left(\frac{x+3}{x+2}\right) = \lim_{x\to -2+} a \operatorname{th}\left(\frac{1}{0+}\right) = a \operatorname{th}(+\infty) = a \cdot 1 = a$, tj. mora vrijediti $3 - 2a^2 = a \quad \Rightarrow \quad 2a^2 + a - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{1,2} = \frac{1}{4}(-1 \pm 5) \quad \Rightarrow \quad a_1 = -\frac{3}{2},\ a_2 = 1$ su rješenja zadatka.

Rješenje 2. školske zadaće iz Matematike1

10.11.2008. grupe 3, 7, 9 - B podgrupa

1. **1.način**: Uočimo da je $a_{n+1} = \sqrt{5a_n}$. Dokazujemo indukcijom da je zadani niz rastući:

   - Baza: $a_1 = \sqrt{5} < \sqrt{5\sqrt{5}} = a_2$.
   - Korak: Pretpostavimo da vrijedi $a_n < a_{n+1}$ za neki $n \in \mathbb{N}$. Tada je $a_{n+1} = \sqrt{5a_n} < \sqrt{5a_{n+1}} = a_{n+2}$.

   Sada dokazujemo da je niz omeđen odozgo (npr. s 5). Dokaz indukcijom:

   - Baza: $a_1 = \sqrt{5} < 5$.
   - Korak: Pretpostavimo da vrijedi $a_n < 5$ za neki $n \in \mathbb{N}$. Tada je $a_{n+1} = \sqrt{5a_n} < \sqrt{5 \cdot 5} = 5$.

   Sada je očito niz omeđen (odozdo je omeđen s $a_1 = \sqrt{5}$ jer je rastući), i monoton , pa je i konvergentan, tj. postoji limes $L = \lim_n a_n$. Računamo ga na sljedeći način:
   $a_{n+1} = \sqrt{5a_n} \quad / \lim_n \quad \Rightarrow \quad L = \sqrt{5L} \quad \Rightarrow \quad L^2 - 5L = 0$
   $\Rightarrow \quad L_1 = 0,\ L_2 = 5$, pa jer je limes (kada postoji) jednoznačno određen i jer je $a_n \geq \sqrt{5} = a_1$,$\forall n \in \mathbb{N}$, zaključujemo da je $L = 5$.

   2.način: Također uočimo $a_n = 5^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}} = 5^{\frac{1}{2}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}} = 5^{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n} \to 5$ kada $n \to +\infty$.

2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x^2)}{\sin^2(2x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1+4x^2)}{4x^2}}{\frac{\sin^2(2x)}{(2x)^2}}\frac{4x^2}{(2x)^2} = \frac{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x^2)}{4x^2}}{\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{(2x)}\right)^2}\lim_{x\to 0}\frac{4x^2}{4x^2} = \frac{1}{1^2}\cdot 1 = 1.$$

3.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{4x+1}{7x+1}\right)^{\frac{2}{x}} = \lim_{x\to 0}\left(1-\frac{3x}{7x+1}\right)^{\frac{2}{x}} = \lim_{x\to 0}\left[\left(1-\frac{3x}{7x+1}\right)^{-\frac{7x+1}{3x}}\right]^{\frac{-3x}{7x+1}\frac{2}{x}} =$$

$$= \left[\lim_{x\to 0}\left(\left(1-\frac{3x}{7x+1}\right)^{-\frac{7x+1}{3x}}\right)\right]^{\lim_{x\to 0}\frac{-6}{7x+1}} = e^{-6}.$$

4. (a) Funkcija f je neprekinuta u točki x_0 ako je $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. (A može, jasno, i $\varepsilon - \delta$ definicija iz knjižice 7, tj. Definicija 7. na str. 14.)

   (b) $\lim_{x\to -3+} f(x) = f(-3) = 2-3a^2$ mora biti jednak $\lim_{x\to -3-} f(x) = \lim_{x\to -3-} a\,\mathrm{th}\left(\frac{x+8}{x+3}\right) = \lim_{x\to -3-} a\,\mathrm{th}\left(\frac{5}{0-}\right) = a\,\mathrm{th}(-\infty) = a\cdot(-1) = -a$, tj. mora vrijediti $2-3a^2 = -a \quad \Rightarrow \quad 3a^2 - a - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{1,2} = \frac{1}{6}(1\pm 5) \quad \Rightarrow \quad a_1 = 1,\ a_2 = -\frac{2}{3}$ su rješenja zadatka.