Rješenja 3. kratke provjere znanja — grupe 1, 3, 5, 7, 9
— A —

1. $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\frac{1}{(x+h)^3} - \frac{1}{x^3}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\frac{x^3-(x+h)^3}{(x+h)^3x^3}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{x^3-x^3-3x^2h-3xh^2-h^3}{hx^3(x+h)^3}$
$= \lim\limits_{h\to 0} \frac{h(-3x^2-3xh-h^2)}{hx^3(x+h)^3} = \frac{-3x^2}{x^3\cdot x^3} = -3x^{-4}$

2. Prvo treba naći točke presjeka. Uvrstimo npr. $y^2 = x$ u prvu jednadžbu. Dobijemo $2x^2 + x - 3 = 0$, odnosno $x_{1,2} = \frac{-1\pm 5}{4}$. Za $x = 1$ dobijemo točke $T_1(1, 1)$ i $T_2(1, -1)$, a $x = \frac{-3}{2}$ nije rješenje jer iz toga imamo $y^2 = -\frac{3}{2}$.
Zatim, deriviramo jednadžbe obje krivulje:
$2y \cdot y' + 4x = 0$, tj. $y' = -\frac{2x}{y}$;
$2y \cdot y' = 1$, odnosno $y' = \frac{1}{2y}$.

   $T_1(1, 1)$
$k_1 = -\frac{2\cdot 1}{1} = -2$, $k_2 = \frac{1}{2\cdot 1} = \frac{1}{2}$. Sada možemo odmah iz $k_1 = \frac{-1}{k_2}$ zaključiti da se radi o pravom kutu ili uvrstiti u formulu za $\tan\phi$ pa iz $\tan\phi = +\infty$ vidjeti da je $\phi = \frac{\pi}{2}$.

   $T_2(1, -1)$
Posve analogno kao za T_1 dobijemo da je kut pravi.

3. $\lim\limits_{x\to\infty} (\cos(\frac{1}{2x}))^{x^2} = (1^\infty) = \lim\limits_{x\to\infty} e^{x^2\cdot\ln\cos(\frac{1}{2x})} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} x^2\cdot\ln\cos(\frac{1}{2x})}$
$\lim\limits_{x\to\infty} x^2\cdot\ln\cos(\frac{1}{2x}) = (\infty\cdot 0) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln\cos\frac{1}{2x}}{\frac{1}{x^2}} = (\frac{0}{0}) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\cos\frac{1}{2x}}\cdot(-\sin\frac{1}{2x})\cdot\frac{1}{2}\cdot(-1)\cdot\frac{1}{x^2}}{-\frac{2}{x^3}}$
$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{\tan\frac{1}{2x}}{2x^2}}{\frac{-2}{x^3}} = \lim\limits_{x\to\infty} -\frac{1}{4}x\cdot\tan\frac{1}{2x} = \lim\limits_{x\to\infty} -\frac{1}{4}x\cdot\frac{1}{2x} = -\frac{1}{8}$
Prema tome, konačno rješenje je $e^{\frac{-1}{8}}$.

Rješenja 3. kratke provjere znanja — grupe 1, 3, 5, 7, 9 — B —

1. $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{x+h}} - \frac{1}{\sqrt{x}}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+h}}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{h\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+h}} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+h}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+h}} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{x-(x+h)}{h\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+h}\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})} = \frac{-1}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{x})} = \frac{-1}{2(\sqrt{x})^3} = -\frac{1}{2}x^{\frac{-3}{2}}$

2. Prvo treba naći točke presjeka. Uvrstimo npr. $y^2 = 2x$ u prvu jednadžbu. Dobijemo $x^2 + x - 6 = 0$, odnosno $x_{1,2} = \frac{-1\pm 5}{2}$. Za $x = 2$ dobijemo točke $T_1(2,2)$ i $T_2(2,-2)$, a $x = -3$ nije rješenje jer iz toga imamo $y^2 = -6$.
   Zatim, deriviramo jednadžbe obje krivulje:
   $2x + \frac{1}{2}\cdot 2y\cdot y' = 0$, tj. $y' = -\frac{2x}{y}$;
   $2y\cdot y' = 2$, odnosno $y' = \frac{1}{y}$.

   $T_1(2,2)$
   $k_1 = -\frac{2\cdot 2}{2} = -2$, $k_2 = \frac{1}{2}$. Sada možemo odmah iz $k_1 = \frac{-1}{k_2}$ zaključiti da se radi o pravom kutu ili uvrstiti u formulu za $\tan\phi$ pa iz $\tan\phi = +\infty$ vidjeti da je $\phi = \frac{\pi}{2}$.

   $T_2(2,-2)$
   Posve analogno kao za T_1 dobijemo da je kut pravi.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}(\tan(\frac{\pi}{4}\cdot\frac{x}{x+1}))^x = (1^\infty) = \lim\limits_{x\to\infty} e^{x\cdot\ln\tan(\frac{\pi}{4}\cdot\frac{x}{x+1})} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\ln\tan(\frac{\pi}{4}\cdot\frac{x}{x+1})}$
   $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\ln\tan(\frac{\pi}{4}\cdot\frac{x}{x+1}) = (\infty\cdot 0) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\tan(\frac{\pi}{4}\cdot\frac{x}{x+1})}{\frac{1}{x}} = (\frac{0}{0})$
   $= \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\tan(\frac{\pi}{4}\cdot\frac{x}{x+1})}\cdot\frac{1}{\cos^2(\frac{\pi}{4}\cdot\frac{x}{x+1})}\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\frac{x+1-x}{(x+1)^2}}{-\frac{1}{x^2}}$
   $= \lim\limits_{x\to\infty}\frac{-\pi x^2}{4(x+1)^2}\cdot\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{4}\cdot\frac{x}{x+1})\cos(\frac{\pi}{4}\cdot\frac{x}{x+1})}$
   $= \lim\limits_{x\to\infty}\frac{-\pi x^2}{4(x+1)^2}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{4}\cdot\frac{x}{x+1})\cos(\frac{\pi}{4}\cdot\frac{x}{x+1})}$
   $= (\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-\pi}{4(1+\frac{1}{x})^2})\cdot\frac{1}{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \frac{-\pi}{4}\cdot\frac{4}{2} = -\frac{\pi}{2}$
   Prema tome, konačno rješenje je $e^{\frac{-\pi}{2}}$.

Rješenja 3. kratke provjere znanja — grupe 2, 4, 6, 8, 10 — A

1. Uvjet neprekidnosti se svodi na: $\sin\pi = a\pi + b$, odnosno $0 = a\pi + b$. Uvjet derivabilnosti se svodi na $\cos\pi = a$, odnosno $a = -1$, pa onda uvrštavanjem u prvu jednadžbu dobijemo i $b = \pi$.

2. Deriviramo jednadžbu krivulje:
   $3x^2 + 3y^2 \cdot y' = 6y + 6xy'$
   $y^2y' - 2xy' = 2y - x^2$
   $y'(y^2 - 2x) = 2y - x^2$
   $y' = \frac{2y-x^2}{y^2-2x}$
   Tangenta treba biti paralelna sa osi x, dakle $k = 0$ u takvim točkama. Još znamo i da su to točke na krivulji, pa dobijemo sustav jednadžbi:
   $$\begin{cases} x^2 = 2y \\ x^3 + y^3 = 6xy \end{cases}$$
   iz kojeg pronađemo $x = 0$ (a tražimo $x \neq 0$) i $x = 2\sqrt[3]{2}$, tj. dobijemo točku $T(2\sqrt[3]{2}, 2\sqrt[3]{4})$.

3. $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x\cdot\arctan^2 x}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \arctan^2 x = \arctan^2(\pm\infty)$
   $= (\pm\frac{\pi}{2})^2 = \frac{\pi^2}{4}$
   $l = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (x \cdot \arctan^2 x - \frac{\pi^2}{4}x) = (\infty - \infty) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\arctan^2 x - \frac{\pi^2}{4}}{\frac{1}{x}} = (\frac{0}{0})$
   $= \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2\cdot\arctan x\cdot\frac{1}{x^2+1}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{-2x^2}{x^2+1}\cdot\arctan x = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{-2x^2}{x^2+1}\cdot \lim\limits_{x\to\pm\infty} \arctan x$
   $= -2 \cdot \lim\limits_{x\to\pm\infty} \arctan x$
   $l_1 = -2 \cdot (-\frac{\pi}{2}) = \pi$ i $l_2 = -2 \cdot \frac{\pi}{2} = -\pi$.
   Prema tome, lijeva kosa asimptota je $y = \frac{\pi^2}{4}x + \pi$, a desna $y = \frac{\pi^2}{4}x - \pi$.

Rješenja 3. kratke provjere znanja — grupe 2, 4, 6, 8, 10 — B

1. Uvjet neprekidnosti se svodi na: $a \cdot 2\pi + b = \cos 2\pi$, odnosno $a \cdot 2\pi + b = 1$. Uvjet derivabilnosti se svodi na $a = -\sin 2\pi$, odnosno $a = 0$, pa onda uvrštavanjem u prvu jednadžbu dobijemo i $b = 1$.

2. Deriviramo jednadžbu krivulje:
$2y + 2xy' - 24x^2 = 3y^2y'$
$2xy' - 3y^2y' = 24x^2 - 2y$
$y'(2x - 3y^2) = 24x^2 - 2y$
$y' = \frac{24x^2-2y}{2x-3y^2}$
Tangenta treba biti paralelna sa osi x, dakle $k = 0$ u takvim točkama. Još znamo i da su to točke na krivulji, pa dobijemo sustav jednadžbi:
$$\begin{cases} 24x^2 - 2y = 0 \\ 2xy - 8x^3 = y^3 \end{cases}$$
iz kojeg pronađemo $x = 0$ (a tražimo $x \neq 0$) i $x = \frac{\sqrt[3]{2}}{6}$, tj. dobijemo točku $T(\frac{\sqrt[3]{2}}{6}, \frac{\sqrt[3]{4}}{3})$.

3. $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{\ln(\cosh(2x+1))}{x^2} = (\frac{\infty}{\infty}) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{1}{\cosh(2x+1)} \cdot \sinh(2x+1) \cdot 2}{2x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{2 \cdot \tanh(2x+1)}{2x} = \frac{\pm 1}{\pm\infty} = 0$
$l = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{\ln(\cosh(2x+1))}{x} = (\frac{\infty}{\infty}) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{1}{\cosh(2x+1)} \cdot \sinh(2x+1) \cdot 2}{1}$
$= \lim\limits_{x \to \pm\infty} 2 \cdot \tanh(2x+1)$
$l_1 = -2$ i $l_2 = 2$.
Prema tome, krivulja ima lijevu horizontalnu asimptotu $y = -2$ i desnu $y = 2$.