Ponovljeni završni ispit iz Matematike 1

26. siječnja 2011.

Pitanja iz 3. ciklusa

1. [**4 boda**] Potrebno je izraditi stup oblika prizme s kvadratnom osnovicom. Cijena materijala iznosi 60 kn/m^3. Zatim treba obojati gornju osnovicu i pobočje stupa pri čemu je cijena boje 10 kn/m^2. Ako je za izradu stupa i bojanje ukupno raspoloživo 1080 kn, koliki je maksimalni mogući volumen stupa? Odgovor obrazložite.

2. [**3 boda**] Odredite područje definicije, ponašanje na rubu područja definicije, asimptote, intervale monotonosti, intervale konveksnosti i konkavnosti, te nacrtajte kvalitativni graf funkcije

$$f(x) = xe^{-\sqrt{x}}.$$

3. [**3 boda**] (a) Služeći se definicijom derivacije i teoremom srednje vrijednosti integralnog računa dokažite sljedeću tvrdnju: Neka je funkcija f neprekinuta na otvorenom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $a \in I$. Tada za svaki $x \in I$ vrijedi

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x).$$

   (b) Služeći se izvedenim pod (a), dokažite Newton-Leibnizovu formulu.

4. [**2 boda**] Izračunajte

$$\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x|\ dx.$$

5. [**3 boda**] Nađite $b \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi

$$\int_{\ln 2}^{b} \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}} = \frac{\pi}{6}.$$

6. [**2 boda**] Izračunajte

$$\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{x^4+1}.$$

7. [**3 boda**] Izračunajte površinu i opseg lika omeđenog pravcima $x = 0$, $y = 2$ te grafom funkcije $y = \operatorname{ch} x$, $x \geq 0$. Nacrtajte sliku.

Okrenite!

Pitanja iz cijelog gradiva

8. **[2 boda]** Odredite prirodno područje definicije (domenu) funkcije

$$f(x) = \arcsin \frac{\pi}{x}$$

   i sva rješenja jednadžbe $f(x) = \dfrac{\pi}{6}$.

9. **[3 boda]** Zadane su matrice:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ \text{i} \ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Izračunajte $(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C})^{-1}$.

10. **[2 boda]** Koristeći definiciju derivacije, izvedite derivaciju funkcije $f(x) = \ln x$.

11. **[3 boda]** Funkciju $f(x) = \mathrm{ch} x$ prikažite u obliku $f(x) = T_5(x) + R_5(x)$, pri čemu je T_5 peti Taylorov polinom funkcije f u razvoju oko točke $c = 0$, a R_5 peti ostatak prikazan u Lagrangeovom obliku.

12. **[3 boda]** Odredite pravokutnik maksimalne površine čija dva vrha leže na osi x, a preostala dva na paraboli $y = -x^2 + 4x - 3$, $y \geq 0$. Koliko iznosi ta površina?

13. **[2 boda]** Izračunajte površinu lika omeđenog krivuljama $y = \sin x$ i $y = \cos x$ za $x \in \left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$. Nacrtajte sliku.

Vrijeme pisanja: 2h i 30 min. Nije dozvoljena uporaba računala niti priručnika.