Ponovljeni drugi međuispit iz Matematike 1

26. siječnja 2011.

1. **[3 boda]** Ispitajte konvergenciju niza zadanog rekurzivno s $a_1 = 2$, $a_n = \dfrac{a_{n-1}+1}{2}$, $n \geq 2$ i izračunajte njegov limes.

2. **[3 boda]** (a) Definirajte pojam beskonačno male veličine $f(x)$ za $x \to x_0$, te pojam ekvivalentnih beskonačno malih veličina $f(x) \sim g(x)$ za $x \to x_0$.

   (b) Dokažite: Ako su $f(x)$ i $g(x)$ beskonačno male veličine za $x \to x_0$, te $f(x) \sim m(x)$, $g(x) \sim n(x)$ za $x \to x_0$, tada je
   $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{m(x)}{n(x)}.$$

   (c) Izračunajte $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin^3 x \cdot \cos(2x)}{x \cdot \sin^2(3x)}$.

3. **[2 boda]** Odredite parametre a i b takve da funkcija
   $$f(x) = \begin{cases} a - x^3, & x < 1 \\ bx^2, & x \geq 1 \end{cases}$$
   bude neprekinuta i ima derivaciju u točki $x = 1$. Odgovor obrazložite!

4. **[2 boda]** Koristeći definiciju derivacije, izvedite derivaciju funkcije $f(x) = \ln x$.

5. **[2 boda]** Koristeći pravilo za derivaciju inverzne funkcije i derivaciju funkcije $f(x) = \mathrm{sh} x$, izvedite derivaciju funkcije $f^{-1}(x) = \mathrm{arsh} x$.

6. **[2 boda]** Nađite jednadžbu tangente na krivulju $x = t + e^{2t}$, $y = t^2 - e^t$ u točki za koju je $t = 0$.

7. **[4 boda]** (a) Funkciju $f(x) = \mathrm{ch} x$ prikažite u obliku $f(x) = T_5(x) + R_5(x)$, pri čemu je T_5 peti Taylorov polinom funkcije f u razvoju oko točke $c = 0$, a R_5 peti ostatak prikazan u Lagrangeovom obliku.

   (b) Aproksimirajte $\mathrm{ch} 1$ vrijednošću $T_5(1)$ iz zadatka (a) i dokažite da je pogreška aproksimacije manja od 10^{-2}.

8. **[2 boda]** Izračunajte: $\displaystyle\lim_{x \to \infty} x \cdot \mathrm{arcctg}(2x)$.

Vrijeme pisanja: 1h i 30 min. Nije dozvoljena uporaba računala niti priručnika.