RJEŠENJA prvog međuispita iz matematike I

Zadatak 1. **(a)** Prelaskom na algebarski oblik kompleksnog broja $z = x + iy$, iz uvjeta $z^2 = |z|^2$ dobivamo $x^2 + 2xyi - y^2 = x^2 + y^2$, odnosno $2y^2 - 2xyi = 0$, odakle slijedi $y = 0$, pa je rješenje realna os.
(b) Uočimo ponajprije da je $z \neq i$. Prelaskom na algebarski oblik $z = x + iy$, imamo da je

$$\frac{1}{z-i} = \frac{1}{x+(y-1)i} \cdot \frac{x-(y-1)i}{x-(y-1)i} = \frac{x-(y-1)i}{x^2+(y-1)^2} = \frac{x}{x^2+(y-1)^2} - \frac{y-1}{x^2+(y-1)^2} i,$$

pa iz uvjeta zadatka slijedi da je $-\frac{y-1}{x^2+(y-1)^2} = 1$, odakle sređivanjem dobivamo jednadžbu $x^2+y^2-y = 0$, odnosno $x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$. Prema tome rješenje je kružnica sa središtem u točki $z = \frac{1}{2}i$ radijusa $r = \frac{1}{2}$, iz koje je izbačen kompleksan broj i.

Zadatak 2. Prelaskom na trigonometrijski oblik kompleksnog broja $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, slijedi da je $z^2 = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$, pa iz uvjeta $\mathrm{Im}(z^2) = \sqrt{3}\mathrm{Re}(z^2)$ slijedi da je $r^2 \sin 2\varphi = r^2\sqrt{3}\cos 2\varphi$. Očito je $r \neq 0$ jer tada nije zadovoljen uvjet $\mathrm{Re}(z^9) = -1$, pa iz prethodnog uvjeta slijedi da je $\mathrm{tg}2\varphi = \sqrt{3}$. Odavde je $\varphi = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$, pa su moguća rješenja za φ unutar intervala $[0, 2\pi\rangle$, kutevi $\frac{\pi}{6}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{6}$ i $\frac{5\pi}{3}$. Sada, iz uvjeta $\mathrm{Re}(z^9) = -1$ slijedi da je $r^9 \cos 9\varphi = -1$, pa $\cos 9\varphi$ mora biti negativan. Taj uvjet zadovoljava jedino kut $\varphi = \frac{5\pi}{3}$, za kojega je $\cos 9\varphi = -1$, pa je $r = 1$. Prema tome, jedino rješenje je $z = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Zadatak 3. Zadatak rješavamo standardnim algoritmom tako da s desne strane matrice dopišemo jediničnu matricu

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dodamo li sve retke prvom, te eliminiramo elemente prvog stupca dobivamo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sada, podijelimo drugi, treći i četvrti redak sa -3. Konačno, dodamo li drugi, treći i četvrti redak pomnožene sa -1 prvom retku, dobivamo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}, \text{ pa je inverz } \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 4. **(a)** Za inverz od $\mathbf{AB}$ vrijedi $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$. Naime, kako su $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ regularne matrice i budući da je množenje matrica asocijativno, vrijedi $\mathbf{AB}(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{ABB}^{-1}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{AIA}^{-1} = \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$. Dovoljno je provjeriti inverz "s jedne strane".
(b) Zbog pokazanog svojstva je $\left(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\right)^{-1} = \left(\mathbf{B}^{-1}\right)^{-1}\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathbf{BA}$, pa za zadane $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ vrijedi

$$\left(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 0 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Zadatak 5. Vektori $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$ i $\mathbf{x_3}$ će biti linearno nezavisni ako je matrica $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 9 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ punog ranga, tj. ranga 3, a inače su linearno zavisni. Za rang vrijedi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 9 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Kako je rang matrice jednak 2 slijedi da su vektori $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$ i $\mathbf{x_3}$ linearno zavisni.

Zadatak 6. Korištenjem elementarnih transformacija imamo da je

$$\begin{bmatrix}1&2&\lambda&1\\1&3&0&1\\2&\lambda&5&\lambda+1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&3&0&1\\1&2&\lambda&1\\2&\lambda&5&\lambda+1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&3&0&1\\0&-1&\lambda&0\\0&\lambda-6&5&\lambda-1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&3&0&1\\0&-1&\lambda&0\\0&\lambda-5&5-\lambda&\lambda-1\end{bmatrix},$$

pa za $\lambda = 5$ sustav nema rješenja. Ako je $\lambda \neq 5$, treći redak možemo podijeliti s $\lambda - 5$:

$$\begin{bmatrix}1&3&0&1\\0&-1&\lambda&0\\0&1&-1&\frac{\lambda-1}{\lambda-5}\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&3&0&1\\0&0&\lambda-1&\frac{\lambda-1}{\lambda-5}\\0&1&-1&\frac{\lambda-1}{\lambda-5}\end{bmatrix}.$$

Ako je $\lambda = 1$ dobivamo sustav $\begin{bmatrix}1&3&0&1\\0&1&-1&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&3&1\\0&1&-1&0\end{bmatrix}$ čije je rješenje dano sa $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+\alpha\begin{bmatrix}-3\\1\\1\end{bmatrix}$. Konačno, ako je $\lambda \neq 1$ i $\lambda \neq 5$ možemo drugu jednadžbu podijeliti sa $\lambda - 1$ pa je $\begin{bmatrix}1&3&0&1\\0&0&1&\frac{1}{\lambda-5}\\0&1&-1&\frac{\lambda-1}{\lambda-5}\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&\frac{-2\lambda-5}{\lambda-5}\\0&0&1&\frac{1}{\lambda-5}\\0&1&0&\frac{\lambda}{\lambda-5}\end{bmatrix}$, tj. sustav ima jedinstveno rješenje $x_1 = \frac{-2\lambda-5}{\lambda-5}$, $x_2 = \frac{\lambda}{\lambda-5}$ i $x_3 = \frac{1}{\lambda-5}$.

Zadatak 7. **(a)** Za karakteristični polinom matrice $\mathbf{A}$ vrijedi $\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}) = \begin{vmatrix}\lambda-1&0&0\\0&\lambda&-1\\0&-1&\lambda\end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda^2-1) = (\lambda-1)^2(\lambda+1)$, pa su svojstvene vrijednosti $\lambda_1 = -1$ i $\lambda_2 = 1$.
(b) Svojstvene vektore pridružene svojstvenoj vrijednosti $\lambda_2 = 1$ dobivamo rješavanjem homogenog sustava

$$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&-1\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},$$

Očito je rang sustava jednak 1, pa imamo dvoparametarsko rješenje sustava $x_1 = \alpha$, $x_2 = x_3 = \beta$, pa su svojstveni vektori pridruženi traženoj svojstvenoj vrijednosti $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$.

Zadatak 8. Zbog definicije logaritma mora vrijediti $\frac{x^2-15}{x-9} > 0$, a zbog drugog korijena je $\ln\left(\frac{x^2-15}{x-9}\right) \geq 0$, odnosno $\frac{x^2-15}{x-9} \geq 1$, pa su u domeni svi realni brojevi za koje je $\frac{x^2-15}{x-9} \geq 1$. Prebacivanjem na lijevu stranu nejednakosti i faktorizacijom brojnika dobivamo nejednadžbu $\frac{x^2-15}{x-9} - 1 = \frac{x^2-x-6}{x-9} = \frac{(x+2)(x-3)}{x-9} \geq 0$. Rješenje te nejednadžbe (grafički ili pomoću tablice) je unija intervala $[-2,3] \cup \langle 9,+\infty\rangle$, što je domena funkcije.

Zadatak 9. Zadatak se svodi na rješavanje nejednadžbe $\cos 2x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ na intervalu $[0,2\pi]$. Sa trigonometrijske kružnice slijedi $2x \in \langle 2k\pi-\frac{\pi}{6}, 2k\pi+\frac{\pi}{6}\rangle$, odnosno $x \in \langle k\pi-\frac{\pi}{12}, k\pi+\frac{\pi}{12}\rangle$, $k \in \mathbf{Z}$. Presječemo li dobivene intervale sa intervalom $[0,2\pi]$ dobivamo da je rješenje $x \in [0,\frac{\pi}{12}\rangle \cup \langle\frac{11\pi}{12},\frac{13\pi}{12}\rangle \cup \langle\frac{23\pi}{12},2\pi]$. Zadatak smo mogli riješiti i pomoću grafa funkcije tako da u istom koordinatnom sustavu na intervalu $[0,2\pi]$ nacrtamo grafove funkcija $f(x) = \cos 2x$ i $g(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, te pogledamo intervale na kojima se graf funkcije $f(x) = \cos 2x$ nalazi iznad pravca $g(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Zadatak 10. Uočimo da je $\frac{\pi}{2} - \text{arctg}x = \text{arcctg}x$. Grafovi su prikazani na slikama: