

## Rješenja druge školske zadaće - grupe 1, 3, 5, 7, 9 - A

1. Koristimo svojstva transponiranja i pretpostavke da su  $A$  i  $B$  simetrične:

$$(AB + BA)^T = (AB)^T + (BA)^T = B^T A^T + A^T B^T = BA + AB = AB + BA$$

$$\Rightarrow AB + BA \text{ je simetrična.}$$

2. Istovremeno rješavamo homogeni sustav i tražimo rang (elementarnim transformacijama):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda + 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4\lambda + 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 - 4\lambda \\ 0 & 1 & 4\lambda \\ 0 & 0 & 1 - 4\lambda^2 \end{bmatrix}$$

Za  $\lambda = \pm\frac{1}{2}$  rang matrice je 2, dok je za preostale vrijednosti parametra rang jednak 3.

Za  $\lambda = \frac{1}{2}$  dobijemo sustav  $\begin{cases} x - z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$  s beskonačno mnogo rješenja, koja možemo parametarski zapisati:  $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}.$

Za  $\lambda = -\frac{1}{2}$  dobijemo sustav  $\begin{cases} x + 3z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$  s beskonačno mnogo rješenja, koja možemo parametarski zapisati:  $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}.$

Za preostale vrijednosti parametra  $\lambda$  sustav ima jedinstveno rješenje  $\vec{0}$ .

3. Matrica  $A$  je regularna ako i samo ako je  $\det(A) \neq 0$ . Determinantu svedemo na gornje-trokutastu tako da joj prvi redak pomnožen s  $-k$  dodamo  $k$ -tom retku, za sve  $k = 2, 3, \dots, n$ . Dobijemo  $\det A = (x - 2) \cdot (x - 3) \cdot \dots \cdot (x - n)$ , pa je traženo rješenje  $x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 3, \dots, n\}$ .

## Rješenja druge školske zadaće - grupe 1, 3, 5, 7, 9 - B

1. Koristimo svojstva transponiranja i pretpostavke je  $S$  simetrična:

$$(A^T SA)^T = A^T S^T (A^T)^T = A^T SA \Rightarrow A^T SA \text{ je simetrična.}$$

2. Istovremeno rješavamo homogeni sustav i tražimo rang (elementarnim transformacijama):

$$\begin{bmatrix} \mu & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -\mu \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \mu - 2 \\ 0 & 1 & 1 - \mu \\ 0 & 0 & \mu(4 - \mu) \end{bmatrix}$$

Za  $\mu = 0$  i  $\mu = 4$  rang matrice je 2, dok je za preostale vrijednosti parametra rang jednak 3.

Za  $\mu = 0$  dobijemo sustav  $\begin{cases} x - 2z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$  s beskonačno mnogo rješenja, koja

možemo parametarski zapisati:  $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}.$

Za  $\mu = 4$  dobijemo sustav  $\begin{cases} x + 2z = 0 \\ y - 3z = 0 \end{cases}$  s beskonačno mnogo rješenja, koja

možemo parametarski zapisati:  $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}.$

Za preostale vrijednosti parametra  $\mu$  sustav ima jedinstveno rješenje  $\vec{0}$ .

3. Matrica  $A$  je regularna ako i samo ako je  $\det(A) \neq 0$ . Determinantu svedemo na gornje-trokutastu tako da joj prvi redak pomnožen s  $-1$  dodamo  $k$ -tom retku, za sve  $k = 2, 3, \dots, n$ . Dobijemo  $\det A = (1 - x) \cdot (2 - x) \cdot \dots \cdot (n - 1 - x)$ , pa je traženo rješenje  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2, \dots, n - 1\}$ .

## Rješenja druge školske zadaće - grupe 2, 4, 6, 8, 10 - A

1. Koristimo karakterizaciju regularnosti matrice pomoću determinante i Binet-Cauchyjev teorem:

$$AB \text{ regularna} \Rightarrow 0 \neq \det(AB) = \det A \cdot \det B \Rightarrow \det A \neq 0 \text{ i } \det B \neq 0$$

$$\Rightarrow A \text{ i } B \text{ su obe regularne.}$$

2. Rješavamo nehomogeni sustav elementarnim transformacijama:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & -2 & \lambda^2 & \lambda \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2\lambda - 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda - 1)(\lambda - 3) & \lambda - 1 \end{array} \right]$$

Za  $\lambda = 3$  sustav nema rješenja (treći redak!). Za  $\lambda = 1$  dobijemo sustav

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ y = 0 \end{cases} \text{ s beskonačno mnogo rješenja, koja možemo parametarski zapi-}$$

sati: 
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

Za preostale vrijednosti parametra  $\lambda$  sustav ima jedinstveno rješenje  $x = \frac{-2-\lambda}{\lambda-3}$ ,  $y = \frac{\lambda-1}{\lambda-3}$  i  $z = \frac{1}{\lambda-3}$ .

3. Traži se determinanta 
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 3 & 3 & 3 & \dots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n-1 & n-1 & \dots & n-1 & n \\ n & n & n & \dots & n & n \end{vmatrix},$$
 koju svedemo na

donje-trokutast oblik tako da joj od  $k$ -tog retka oduzmemo  $(k+1)$ -redak, za  $k = 1, 2, \dots, n-1$ . Zatim se dobije  $\det A = (-1)^{n-1} \cdot n$ .

## Rješenja druge školske zadaće - grupe 2, 4, 6, 8, 10 - B

1. Koristimo karakterizaciju regularnosti matrice pomoću determinante i Binet-Cauchyjev teorem:

$$AB \text{ singularna} \Rightarrow 0 = \det(AB) = \det A \cdot \det B \Rightarrow \det A = 0 \text{ ili } \det B = 0$$

$\Rightarrow$  Barem jedna od njih mora biti singularna.

2. Rješavamo nehomogeni sustav elementarnim transformacijama:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & \mu & 1 \\ 1 & 3 & \mu^2 & \mu \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3\mu - 2 & 1 \\ 0 & 1 & \mu - 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\mu - 5)(\mu - 1) & \mu - 1 \end{array} \right]$$

Za  $\mu = 5$  sustav nema rješenja (treći redak!). Za  $\mu = 1$  dobijemo sustav  $\begin{cases} x + z = 1 \\ y = 0 \end{cases}$  s beskonačno mnogo rješenja, koja možemo parametarski zapi-

sati:  $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}.$

Za preostale vrijednosti parametra  $\mu$  sustav ima jedinstveno rješenje  $x = \frac{-2\mu-3}{\mu-5}$ ,  $y = -\frac{\mu-1}{\mu-5}$  i  $z = \frac{1}{\mu-5}$ .

3. Traži se determinanta  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \end{vmatrix}$ , koju svedemo na gornje-

trokutast oblik tako da joj od  $k$ -tog retka oduzmemo  $(k-1)$ -redak, redom za  $k = n, n-1, \dots, 3, 2$ . Zatim se dobije  $\det A = 1$ .