

Determinante n -tog reda, zadatci za vježbu

Izračunajte determinantu matrice $\mathbf{A} = (a_{ij})$ reda n (preporučamo vam da riješite barem prvih pet zadataka) :

1. $a_{ij} = 2$, za $i \leq j$, $a_{ij} = 1$, za $i > j$,
2. $a_{ij} = \min\{i, j\}$,
3. $a_{ij} = \max\{i, j\}$,
4. $a_{ij} = x$, za $i = j$, $a_{ij} = y$, inače, $x \neq y$, $y \neq 0$,
5. $a_{ij} = 1$, za $i + j = n + 1$, $a_{ij} = 0$, inače,
6. $a_{ij} = |i - j|$.

Rješenja.

1. Od svakog retka oduzmemo prvi. Time dobivamo determinantu trokutaste matrice koja je jednaka umnošku elemenata na dijagonali. Rezultat je 2.

(u prvom koraku se može i izlučiti broj 2 iz prvog retka.)

2. Od svakog retka, osim prvog, oduzmemo prethodni. Rezultat je 1.

3. Od svakog retka, osim zadnjeg, oduzmemo sljedeći. Rezultat je $(-1)^{n-1}n$.

4. Sve retke treba pribrojiti prvome; nakon toga slično kao u zadatku 1. Rezultat je $(x + (n - 1)y) \cdot (x - y)^{n-1}$.

5. Zamijenimo prvi i n -ti redak, drugi i $n - 1$ -vi redak itd. dok ne dobijemo determinantu jedinične matrice koja je jednaka 1. Determinanta polazne matrice je 1 ili -1 u ovisnosti o parnosti broja zamjena redaka, tj. determinanta je jednaka 1 za $n = 4k$ i $n = 4k + 1$, $k \in \mathbf{N}$, a jednaka je -1 za $n = 4k + 2$ i $n = 4k + 3$, $k \in \mathbf{N}_0$.

6. Svakom retku, osim prvog, oduzmemo prethodni. Zatim svakom stupcu, osim zadnjem, dodamo zadnji. Time dobivamo determinantu trokutaste matrice. Rezultat je $(-1)^{n-1}(n - 1) \cdot 2^{n-2}$.