**Derivacija kompozicije funkcija**

*Primjer.* Izvedimo derivaciju funkcije $f(x) = \sin(x^2)$.

$$(\sin(x^2))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\left((x+\Delta x)^2\right) - \sin(x^2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\left((x+\Delta x)^2\right) - \sin(x^2)}{(x+\Delta x)^2 - x^2} \cdot \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}.$$

Uvedimo oznaku $u = x^2$ i $\Delta u = (x+\Delta x)^2 - x^2$. Primijetimo da, ako $\Delta x \to 0$, tada i $\Delta u \to 0$. Zato slijedi

$$(\sin(x^2))' = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\sin(u+\Delta u) - \sin u}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \cos u \cdot 2x = \cos(x^2) \cdot 2x.$$

Pokušajmo poopćiti navedeni postupak:

$$((f \circ g)'(x)) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{g(x+\Delta x) - g(x)} \cdot \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}.$$

Da bi izrazi u nazivniku bili različiti od 0, mora postojati okoliš točke $x$ takav da za sve točke $a$ iz tog okoliša vrijedi da je $g(a) \neq g(x)$, pa ćemo to uzeti za dodatnu pretpostavku.

Uvedimo oznaku $u = g(x)$ i $\Delta u = g(x+\Delta x) - g(x)$. S obzirom da je $g$ neprekinuta, slijedi da za $\Delta x \to 0$ imamo $\Delta u = g(x+\Delta x) - g(x) \to 0$, pa zato dobivamo

$$((f \circ g)'(x)) = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Kao što smo naveli, gornji dokaz nije sasvim općenit, jer smo koristili dodatnu pretpostavku da mora postojati okoliš točke $x$ takav da za sve točke $a$ iz tog okoliša vrijedi da je $g(a) \neq g(x)$. Naglašavamo da ona ne isključuje samo slučaj kada je $g$ konstanta (taj je slučaj jednostavan i za njega je gornja formula istinita i beskorisna). Ali za sve slučajeve gdje ćemo primjenjivati ovo pravilo u ovom i ostalim uvodnim matematičkim kolegijima, taj je uvjet zadovoljen. No, svakako napomenimo da gornje pravilo vrijedi općenito, tj. da vrijedi sljedeći teorem:

**Teorem.** Neka je složena funkcija $f \circ g$ definirana u nekoj točki $x$. Neka je $g$ diferencijabilna u točki $x$ i neka je $f$ diferencijabilna u točki $g(x)$. Tada funkcija $f \circ g$ ima derivaciju u $x$ i ona je dana formulom:

$$((f \circ g)'(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Dokaz teorema u općem slučaju možete naći u osmoj knjižici "Derivacija funkcije" na stranicama 16 i 17.