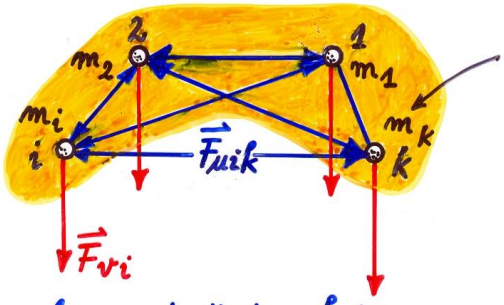
MEHANIKA SUSTAVA SITNIH TIJELA (materijalnih točaka)

N različitih sitnih tijela mase m_i i vektora položaja $\vec{r}_i$ $(i=1,2,\dots N)$ tvore SUSTAV SITNIH TIJELA (čestica). Na čestice djeluju UNUTRAŠNJE i VANJSKE SILE:

$\vec{F}_u \equiv$ UNUTRAŠNJA SILA

$\vec{F}_v \equiv$ VANJSKA SILA



ČVRSTO TIJELO kao SUSTAV ČESTICA

UNUTRAŠNJE SILE: sile između čestica kojima one jedna na drugu djeluju. Npr. m_i djeluje na m_k silom $\vec{F}_{uik}$. Newtonovim 3. zakonom sile i protusile, slijedi $\vec{F}_{uik} = -\vec{F}_{uki}$.

Za svaku česticu vrijedi 2. Newtonov zakon, pri čemu ne razlikujemo unutrašnje i vanjske sile:

$$\vec{F}_u \text{ i } \vec{F}_v \xrightarrow{\text{kao } \vec{F}_i} \vec{F}_i = \frac{d}{dt}(m_i\vec{v}_i) = \frac{d\vec{p}_i}{dt} \qquad i = 1, 2, \dots N$$

U sustavu čestica se pojedinačne sile mogu zbrajati. Prema 3. aksiomu, unutrašnje sile se javljaju u parovima i kao takve poništavaju ($\vec{F}_{uik} + \vec{F}_{uki} = 0$). Preostaju samo vanjske sile, tako da imamo ZAKON OČUVANJA KOLIČINE GIBANJA:

$$\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N}\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\left\{\sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i\right\} \longrightarrow \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_{vi} = \frac{d}{dt}(\vec{p}_u)$$

SUMA VANJSKIH SILA NA SUSTAV SITNIH TIJELA JEDNAKA JE VREMENSKOJ PROMJENI UKUPNE KOLIČINE GIBANJA p_u.

- KAD NEMA VANJSKIH SILA, SUSTAV JE ZATVOREN, IZOLIRAN ili SLOBODAN:

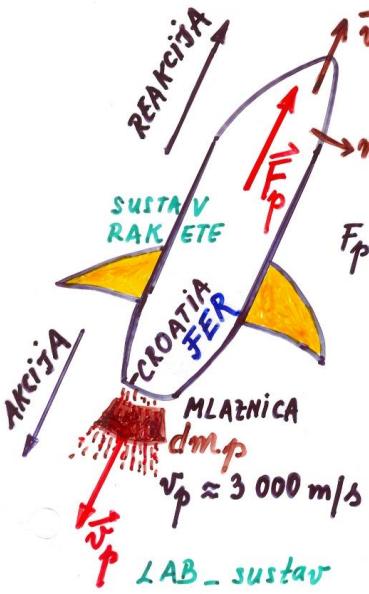
$$\frac{d}{dt}(\vec{p}_u) = 0 \qquad \vec{p}_u = \text{konst.}$$

U ZATVORENIM SUSTAVIMA, UKUPNA KOLIČINA GIBANJA JE KONSTANTNA, SVEJEDNO KOJA SE MEĐUDJELOVANJA I PROCESI U NJEMU DOGAĐAJU.

ZAKON OČUVANJA KOLIČINE GIBANJA

JEDNADŽBA GIBANJA RAKETE

T. P.



- Analogija: KOLICA s drvenim blokovima – bacanjem blokova, GIBANJE.
- Raketa je izolirani (zatvoreni) sustav: ($\vec{F}_v = \emptyset$)

$$\vec{p}_{ukupni} = \vec{p}_{RAKETE} + \vec{p}_{plinova} = konst.$$

u trenu t → masa RAKETE m, brzina $\vec{v}$ → $m\vec{v}$

u trenu $(t+dt)$ ⇒ masa RAKETE $m - dm_p$, brzina $\vec{v} + d\vec{v}$

BRZINA PLINOVA → $\vec{v}_p$ PREMA RAKETI

→ $\vec{v} + \vec{v}_p$ u LAB-sustavu

- PRINCIP OČUVANJA KOLIČINE GIBANJA:

$dm_p\, d\vec{v}$ SE ZANEMARUJE!

$$m\vec{v} = (m - dm_p)(\vec{v} + d\vec{v}) + dm_p(\vec{v} + \vec{v}_p)$$

$$m\vec{v} = m\vec{v} + m\,d\vec{v} - dm_p\vec{v} - dm_p\,d\vec{v} + dm_p\vec{v} + dm_p\vec{v}_p$$

$$m\,d\vec{v} + dm_p\vec{v}_p = 0$$

POTISAK RAKETE $\vec{F}_p$:

$$d\vec{v} = -\frac{dm_p}{m}\vec{v}_p \qquad dm = -dm_p \text{ (PROMJENA MASE RAKETE.)}$$

$$\boxed{d\vec{v} = \frac{dm}{m}\vec{v}_p} \quad (*)$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} = \frac{\vec{v}_p}{m}\cdot\frac{dm}{dt}$$

$$\boxed{m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_p = \vec{v}_p\frac{dm}{dt}}$$

- NA RAKETU DJELUJE VANJSKA SILA $\vec{F}_v$ (gravitacija):

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v}_p\frac{dm}{dt} + \vec{F}_v$$

- JEDNADŽBA BRZINE RAKETE: (*)

$$\int_{v_0}^{v} d\vec{v} = \int_{m_0}^{m} \vec{v}_p\frac{dm}{m} \qquad \vec{v} - \vec{v}_0 = \vec{v}_p \ln\frac{m}{m_0}$$

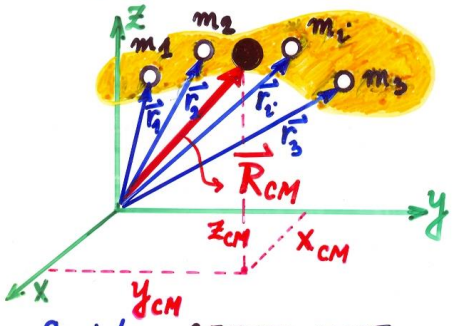
$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_0 - \vec{v}_p \ln\frac{m_0}{m}}$$

ili, os x u smjeru gibanja rakete: → $v = v_0 + v_p \ln\frac{m_0}{m}$

T.P.

CENTAR MASE

Svako sitno tijelo m_i doprinosi ukupnoj masi M sustava. CENTAR MASE je jedna točka u prostoru čiji je radijusvektor suma težinskih radijusvektora relativne mase (m_i/M) svakog sitnog tijela:



$$M = \sum_{i=1}^{N} m_i \qquad \vec{R}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i$$

$$\vec{R}_{CM} = x_{CM}\vec{i} + y_{CM}\vec{j} + z_{CM}\vec{k}$$

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i m_i x_i \qquad y_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i m_i y_i \qquad z_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i m_i z_i$$

Svojstva CENTRA MASE:

Množenjem $\vec{R}_{CM}$ masom M i diferenciranjem po vremenu, slijedi:

$$M\frac{d}{dt}\vec{R}_{CM}(t) = M\vec{v}_{CM} = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d}{dt}\vec{r}_i(t) = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i}_{\vec{p}_u}$$

$$\boxed{\vec{p}_{CM} = \vec{p}_u}$$

I. Sustav se može zamijeniti CENTROM MASE. Centar mase se giba kao da je u njemu koncentrirana (ujedinjena) ukupna masa sustava. Kao da ima ukupnu količinu gibanja sustava.

Diferenciranjem još jedanput po vremenu, dobivamo:

$$M\frac{d^2}{dt^2}\vec{R}_{CM}(t) = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d^2}{dt^2}\vec{r}_i(t) = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$

$$M\vec{a}_{CM} = \vec{F}_{CM} = \underbrace{\sum_{\substack{i,k=1 \\ i\neq k}}^{N} \vec{F}_{unik}}_{=0} + \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{vi}$$

$$\boxed{\vec{F}_{CM} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{vi}}$$

II. CENTAR MASE se giba kao jedna točka koncentrirane mase na koju djeluje suma svih vanjskih sila.

III. Kad nema vanjskih sila, $\sum_i \vec{F}_{vi} = 0$, tada je:

- $M\vec{a}_{CM} = 0$, $\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = 0 \longrightarrow \vec{v}_{CM} = konst.$ Centar mase se giba jednoliko po pravcu (ili miruje).
- U zatvorenom sustavu, djelovanjem unutrašnjih sila se CENTAR MASE SUSTAVA NE MIJENJA (ostaje u istoj točki).