ZAVRŠNI ISPIT IZ MATEMATIKE 1

22.1.2010.

PITANJA IZ 3. CJELINE GRADIVA

1. [3 boda] Jedan brid kvadra dvostruko je veći od drugog, a oplošje kvadra iznosi 10 cm^2. Odredi najveći mogući volumen kvadra.

2. [4 boda] Odredi područje definicije (domenu), ispitaj ponašanje na rubovima područja definicije, nađi lokalne ekstreme i asimptote, te nacrtaj kvalitativni graf funkcije

$$f(x) = xe^{\frac{1}{x-2}}.$$

Napomena: Nije potrebno tražiti intervale konveksnosti i konkavnosti.

3. [2 boda] a) Nađi sve funkcije za koje vrijedi $F'(x) = x \cos x$.
b) Među funkcijama dobivenim u a) nađi onu koja zadovoljava uvjet $F(0) = 0$.

4. [2 boda] Izračunaj

$$\int \frac{\mathrm{arctg} x + x}{x^2+1} dx.$$

5. [3 boda] Izračunaj

$$\int \frac{2x+4}{x^3-x^2+4x-4} dx.$$

6. [2 boda] Odredi sve funkcije F takve da je

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+2x-x^2}}.$$

7. [2 boda] Dokaži konvergenciju nepravog integrala

$$\int_1^{+\infty} \cos x \cdot 3^{-x^2} dx.$$

8. [2 boda] Odredi parametar a tako da površina lika omeđenog krivuljom $y = ax^2$ i pravcem $y = 1$ iznosi 1.

PITANJA IZ CIJELOG GRADIVA

9. [2 boda] Odredi svih 6 rješenja jednadžbe $z^6 = (\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})^6$.

10. a) Dokaži da ako je λ svojstvena/vlastita vrijednost matrice $\mathbf{A}$, onda je $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$.

b) Zadana je matrica $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 7 \end{pmatrix}$. Odredi sve svojstvene/vlastite vrijednosti matrice $\mathbf{A}$. Odredi svojstveni/vlastiti vektor za najveću svojstvenu/vlastitu vrijednost matrice $\mathbf{A}$.

11. [2 boda] Odredi parametar a tako da funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{3x^2+x}\operatorname{arctg}x, & x > 0 \\ a(\sin x + 1), & x \leq 0 \end{cases}$$

bude neprekinuta.

12. a)[1 bod] Koristeći definiciju derivacije izvedi $(\sin x)' = \cos x$.

b)[2 boda] Nađi jednadžbu sinusoide čiji je graf zadan slikom:

(Opis slike: Sinusoida ima tri susjedne nultočke u $(0,0), (2,0), (4,0)$; pozitivna je na $[0,2\rangle$, negativna na $[2,4\rangle$, a tangenta na sinusoidu u (0,0) zatvara s pozitivnim dijelom x-osi kut $30°$.)

13. [3 boda] Nađi pravokutnik maksimalne površine čija se dva vrha nalaze na krivulji $y = \frac{x^2}{x^2+1}$, a jedna stranica leži na horizotalnoj asimptoti te krivulje. Izračunaj površinu tog pravokutnika.

14. [2 boda] Odredi površinu lika određenog parabolom i pravcem, ako su grafovi tih funkcija zadani slikom:

(Opis slike: Tjeme parabole je u točki $(1,4)$, nultočke parabole su $(0,0), (2,0)$; pravac prolazi kroz točke $(0,0), (1,4)$.)

Vrijeme pisanja je 150 minuta.

Dozvoljeno je korištenje samo službenog podsjetnika.