



Slavko Vujević

# Numeričko modeliranje elektromagnetskih pojava

Zagreb, 31. ožujka 2017.



## Sadržaj predavanja:

Osnovna lema varijacijskog računa.

Aproksimacija funkcija.

Lokalizacija baza - tehnika konačnih elemenata.

Rješavanje strujnih krugova tehnikom konačnih elemenata.

Maxwellove jednačbe. Jednačbe potencijala.

Numeričko rješavanje diferencijalnih jednačbi - MKE.

Metoda graničnih elemenata.

Numeričko rješavanje integralnih jednačbi.

Bridni konačni elementi.

Kontinuirana numerička Fourierova transformacija.

## Osnovna lema varijacijskog računa (1)

Skalarni produkt funkcija u Hilbertovom prostoru opisan je izrazom:

$$(\varepsilon, h) = \int_{\Omega} \varepsilon(x) \cdot h(x) \cdot d\Omega$$

**Lema:**

Ako za neprekinutu funkciju

$$\varepsilon : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

i za svaku neprekinutu funkciju

$$h : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

3

## Osnovna lema varijacijskog računa (2)

vrijedi:

$$\int_{\Omega} \varepsilon(x) \cdot h(x) \cdot d\Omega = 0 \quad ; \quad x \in \Omega$$

onda je:

$$\varepsilon(x) \equiv 0 \quad \forall x \in \Omega$$

Iz ove se leme mogu izvesti sve numeričke metode i većina točnih metoda za rješavanje diferencijalnih jednadžbi kao što je npr. Laplaceova transformacija.

4

## Osnovna lema varijacijskog računa (3)

Izraz:

$$\int_{\Omega} \varepsilon(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}(\mathbf{x}) \cdot d\Omega = 0 \quad ; \quad \mathbf{x} \in \Omega$$

u literaturi iz primjene numeričkih metoda ima različite nazive. On se veoma često naziva **metodom težinskih odstupanja (weighted residual method)**, a u primjeni numeričkih metoda u teoriji antena zove se **metoda momenata (moment method)**.

5

## Aproksimacija funkcija (1)

Aproksimacija funkcija  $\equiv$  funkcionalna približenja

Neka je zadana funkcija:

$$f(\mathbf{x}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

Zadana se funkcija može aproksimirati linearnom kombinacijom baznih funkcija (vektora), odnosno pomoću izraza:

$$\tilde{f}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \varphi_i(\mathbf{x})$$

6

## Aproksimacija funkcija ( 2 )

Bazne funkcije (vektori):

$$\varphi_i(x) : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

se još zovu i koordinatni vektori.

Bazne funkcije se "proizvoljno" biraju, dok su koeficijenti linearne kombinacije

$$\alpha_i \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

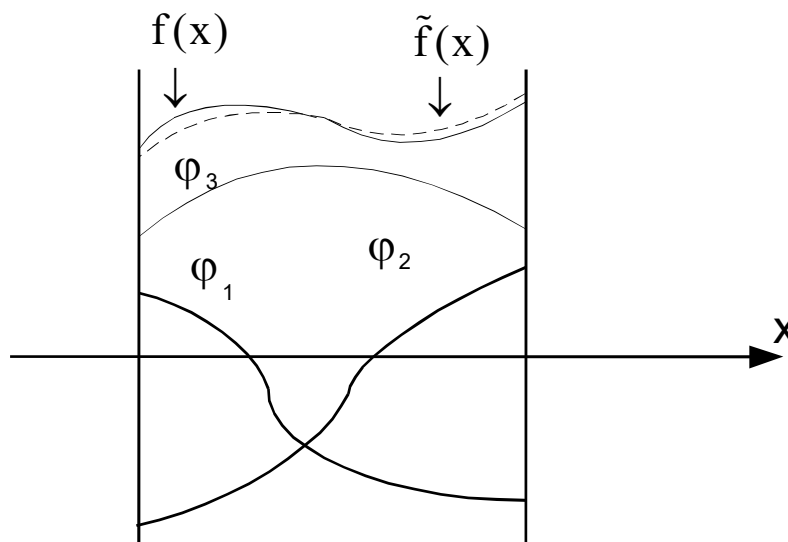
nepoznati.

Važno je istaknuti da bazne funkcije moraju biti linearno nezavisne.

7

## Aproksimacija funkcija ( 3 )

Radi jasnoće, aproksimacija funkcije se može grafički ilustrirati.



Ilustracija aproksimacije funkcije

8

## Aproksimacija funkcija (4)

Kriterij za izračunavanje koeficijenata  $\alpha_i$  ?

$$\varepsilon(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \tilde{f}(\mathbf{x})$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} (f - \tilde{f}) \cdot h_j(\mathbf{x}) \cdot d\Omega = 0 \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, n$$

gdje je:  $h_j(\mathbf{x})$  - koordinatni vektor test-prostora

- test-funkcija

- težinska funkcija

9

## Aproksimacija funkcija (5)

$$\sum_{i=1}^n a_{ji} \cdot \alpha_i = b_j \quad ; \quad j = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$\Rightarrow a_{ji} = \int_{\Omega} \varphi_i(\mathbf{x}) \cdot h_j(\mathbf{x}) \cdot d\Omega$$

$$b_j = \int_{\Omega} f \cdot h_j(\mathbf{x}) \cdot d\Omega$$

10

## Aproksimacija funkcija (6)

Pisano matrično:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix}$$

Pisano sažeto, matrični sustav jednažbi glasi:

$$[A] \cdot \{\alpha\} = \{B\}$$

11

## Bazni vektori rješenja i test funkcije (1)

### Ortonormirane baze

$$\int_{\Omega} \varphi_i \cdot h_j \cdot d\Omega = \delta_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{za } i = j \\ 0 & \text{za } i \neq j \end{cases}$$

gdje je  $\delta_{ji}$  Kroneckerov simbol.

$$\Rightarrow a_{ji} = \int_{\Omega} \varphi_i \cdot h_j \cdot d\Omega = \delta_{ji}$$

12

## Bazni vektori rješenja i test funkcije (2)

$$\sum_{i=1}^n \delta_{ji} \cdot \alpha_i = \alpha_j = b_j \quad ; \quad j=1, 2, \dots, n$$

$$\alpha_j = b_j = \int_{\Omega} f \cdot h_j \cdot d\Omega \quad \Rightarrow \quad \alpha_i = \int_{\Omega} f \cdot h_i \cdot d\Omega$$

$\alpha_i$  - Fourierovi koeficijenti

## Bazni vektori rješenja i test funkcije (3)

Slijedi da za ortonormirane baze vrijedi da je matrica sustava:

$$[A] = [I] \quad - \quad \text{jedinična matrica}$$

$$[A] \cdot \{\alpha\} = [I] \cdot \{\alpha\} = \{\alpha\} = \{B\}$$

$$\Rightarrow \quad \{\alpha\} = \{B\}$$

## Bazni vektori rješenja i test funkcije (4)

Za ortogonalne baze vrijedi da je:

$$\int_{\Omega} \varphi_i \cdot h_j \cdot d\Omega = \begin{cases} \neq 0 & \text{za } i = j \\ = 0 & \text{za } i \neq j \end{cases}$$

$$a_{jj} \cdot \alpha_j = b_j = \int_{\Omega} f \cdot h_j \cdot d\Omega \quad \Rightarrow \quad \alpha_k = \frac{1}{a_{kk}} \cdot \int_{\Omega} f \cdot h_k \cdot d\Omega$$

$[A]$  - dijagonalna matrica

15

## Bazni vektori rješenja i test funkcije (5)

Uobičajeni izbor ortonormiranih (ortogonalnih) polinoma koji se koriste za baze jest:

- Fourierovi trigonometrijski polinomi
- Legenderovi polinomi
- Čebiševljevi polinomi

Primjer ortogonalnih baza – tzv. razvoj funkcije  $f(x)$  u Fourierov red.

Bazne funkcije aproksimacije  $\equiv$  težinskim funkcijama

To je Galjerkin-Bubnovljeva metoda, a kod aproksimacije funkcija to je ujedno i metoda najmanjih kvadrata

16



## Aproksimacija funkcija – izbor metode (1)

Izbor (naziv) metode ovisi prije svega o izboru skupa test funkcija.

Aproksimacija funkcije glasi: 
$$\tilde{f}(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \varphi_i(x)$$

Nepoznati koeficijenti se računaju iz sustava jednadžbi:

$$\sum_{i=1}^n a_{ji} \cdot \alpha_i = b_j \quad ; \quad j = 1, 2, 3, \dots, n$$

## Aproksimacija funkcija – izbor metode (2)

Iz osnovne leme varijacijskog računa slijedi da je:

$$a_{ji} = \int_{\Omega} \varphi_i(x) \cdot h_j(x) \cdot d\Omega$$

$$b_j = \int_{\Omega} f(x) \cdot h_j(x) \cdot d\Omega$$

## Aproksimacija funkcija – izbor metode (3)

Neke od važnijih metoda:

a) Galjerkin-Bubnovljeva metoda:

$$h_j(x) = \varphi_j(x) \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, n$$

b) Metoda momenata (u užem smislu):

$$h_j(x) = x^{j-1} \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, n$$

19

## Aproksimacija funkcija – izbor metode (4)

c) Metoda kolokacije u točki:

$$h_j(x) = \delta(x - x_j) = \Delta(x - x_j) \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$\delta(x - x_j)$  – Diracova delta - funkcija

$$\Rightarrow \int_{\Omega} (f - \tilde{f}) \cdot \delta(x - x_j) \cdot d\Omega = 0 \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, n$$

20

## Aproksimacija funkcija – izbor metode (5)

$$\Rightarrow \tilde{f}(x_j) = f(x_j) \quad ; \quad j=1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^n \varphi_i(x_j) \cdot \alpha_i = f(x_j) \quad ; \quad j=1, 2, \dots, n$$

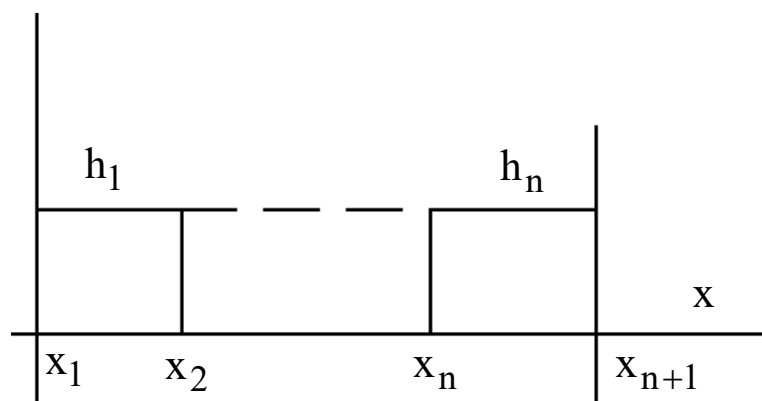
$$a_{ji} = \varphi_i(x_j) \quad ; \quad b_j = f(x_j) \quad ; \quad i, j=1, 2, \dots, n$$

21

## Aproksimacija funkcija – izbor metode (6)

d) Metoda kolokacije u podpodručju:

$$h_j(x) = \begin{cases} 1 & \text{za } x_j < x_{j+1} \\ 0 & \text{u ostatku domene} \end{cases} \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, n$$



22

## Aproksimacija funkcija – izbor metode (7)

e) Metoda najmanjih kvadrata:

$$F = \int_{\Omega} (f - \tilde{f})^2 \cdot d\Omega = \int_{\Omega} \left( f - \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \varphi_i(x) \right)^2 \cdot d\Omega$$

⇒ Traži se minimum funkcionala (integrala kvadrata greške)

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_j} = 0 \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Metoda najmanjih kvadrata svodi se na Galjerkin-Bubnovljevu metodu.

23

## Aproksimacija funkcija – primjer

Razvijte funkciju  $y = f(x) = \frac{\sin x}{\sin 1} - x$  ;  $x \in [0, 1]$

po bazi:  $\varphi_1 = x \cdot (1 - x)$

$$\varphi_2 = x^2 \cdot (1 - x)$$

po metodi momenata.

Rješenje:

Po metodi momenata test funkcije su:  $h_1 = 1$  ;  $h_2 = x$

24

## Aproksimacija rezultata mjerenja polinomom (1)

Na osnovi razvijenog algoritma za aproksimaciju funkcije treba razviti algoritam za aproksimaciju rezultata mjerenja u  $m$  točaka pomoću polinoma  $n$ -tog stupnja. Logično je da vrijedi:  $(n + 1) < m$ .

Dakle, funkcija  $f(x)$  ima  $m$  poznatih vrijednosti dobivenih mjerenjem:

$$f(x_j) \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, m$$

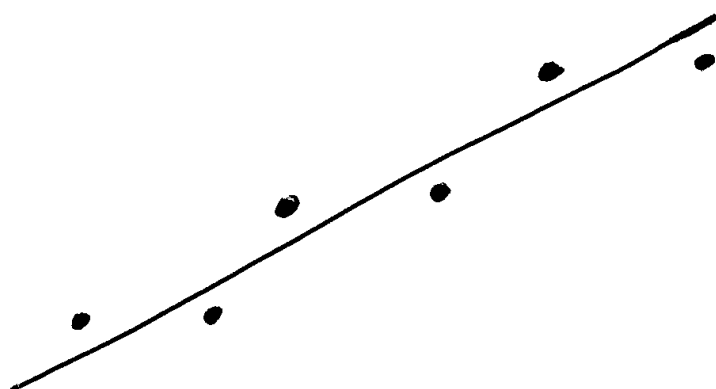
Aproksimacijski polinom glasi:

$$\tilde{f}(x) = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot x + \dots + \alpha_{n+1} \cdot x^n = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \cdot x^{i-1}$$

## Aproksimacija rezultata mjerenja polinomom (2)

Primjer:

Aproksimacija rezultata mjerenja pravcem (polinomom prvog stupnja)



### Aproksimacija rezultata mjerenja polinomom (3)

$$\Rightarrow \tilde{f}(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \cdot x^{i-1} = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \cdot \varphi_i(x)$$

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_1(x) = 1 \\ \varphi_2(x) = x \\ \vdots \\ \varphi_{n+1}(x) = x^n \end{array} \right\} \text{Bazne funkcije aproksimacije}$$

27

### Aproksimacija rezultata mjerenja polinomom (4)

Funkcija  $f(x)$  ima  $m$  poznatih vrijednosti. Koju metodu aproksimacije treba izabrati?

Logičan izbor je metoda kolokacije u točki:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \varphi_i(x_j) \cdot \alpha_i = f(x_j) \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, m$$

$$a_{ji} = \varphi_i(x_j) = x_j^{i-1} \quad ; \quad b_j = f(x_j)$$

28

## Aproksimacija rezultata mjerenja polinomom (5)

Sustav od  $m$  jednažbi s  $(n+1)$  nepoznanica:

$$[A] \cdot \{\alpha\} = \{B\}$$

Metoda najmanjih kvadrata daje sljedeći sustav jednažbi:

$$[A]^T \cdot [A] \cdot \{\alpha\} = [A]^T \cdot \{B\}$$

gdje je T oznaka za transponiranje matrice.

29

## Aproksimacija rezultata mjerenja polinomom (6)

Sustav od  $m$  jednažbi s  $(n+1)$  nepoznanica:

$$[A] \cdot \{\alpha\} = \{B\}$$

može se riješiti pomoću algoritma koji koristi razvoj matrice  $[A]$  po singularnim vrijednostima (SVD algoritam).

To je rješenje koje ima minimalnu Euklidovu normu:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i^2 = \min.$$

30

## Lokalizacija baza, konačni elementi (1)

Lokalizaciju baza najlakše je objasniti na primjeru aproksimacije funkcija jedne varijable.

Područje se dijeli na konačne elemente (konačne dijelove).

Podjela područja na konačne elemente zove se **diskretizacija** područja ili **tehnika konačnih elemenata**.

Konačni elementi čine kompatibilnu konfiguraciju, tj. konačni elementi se ne preklapaju te unija konačnih elemenata daje područje  $\Omega$ :

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{NEL} e_i \quad \text{ili} \quad \Omega = \bigcup_{e=1}^{NEL} \Omega_e$$

31

## Lokalizacija baza, konačni elementi (2)

Svakom konačnom elementu se pridružuje proizvoljan konačan broj čvorova (NCE). Čvorovi konačnog elementa se nazivaju lokalnim čvorovima. 1D konačni elementi imaju najmanje 2 (lokalna) čvora.

Dvočvorni konačni element:



Tročvorni konačni element:



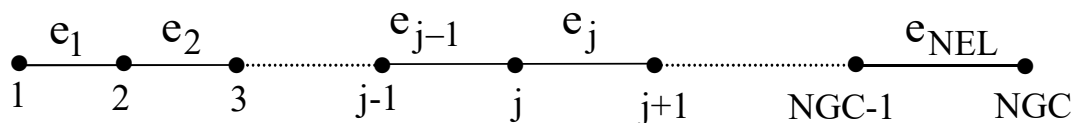
32



## Lokalizacija baza, konačni elementi (3)

Radi jednostavnosti, uzet ćemo da se cjelokupno područje dijeli na konačne elemente koji imaju isti ukupan broj lokalnih čvorova (NCE).

Neka je cjelokupno područje  $\Omega$  podijeljeno na NEL konačnih elemenata te neka su svi konačni elementi dvočvorni. Neka je oznaka za ukupan broj globalnih čvorova NGC.



Lokalizirane bazne funkcije aproksimacije pridružuju se globalnim čvorovima.

33

## Lokalizacija baza, konačni elementi (4)

Aproksimacija funkcije  $f(x)$  glasi:

$$\tilde{f}(x) = \sum_{j=1}^{NGC} \alpha_j \cdot \varphi_j(x)$$

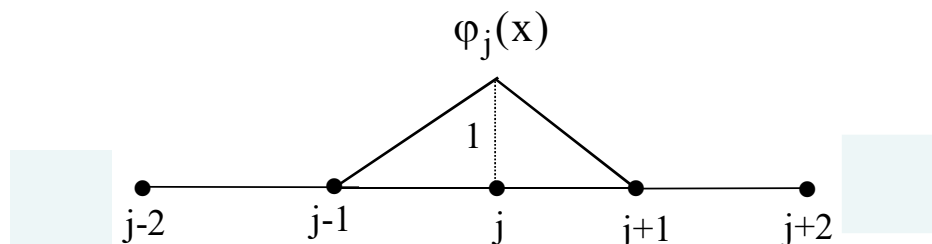
Bazna funkcija aproksimacije  $\varphi_j(x)$  pridružuje se  $j$ -tom globalnom čvoru.

$$\varphi_j(x) = \delta_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{u } j\text{-tom globalnom čvoru} \\ 0 & \text{u svim ostalim globalnim čvorovima} \end{cases}$$

34

## Lokalizacija baza, konačni elementi (5)

Bazna funkcija  $\varphi_j(x)$  prikazana je na sljedećoj slici:



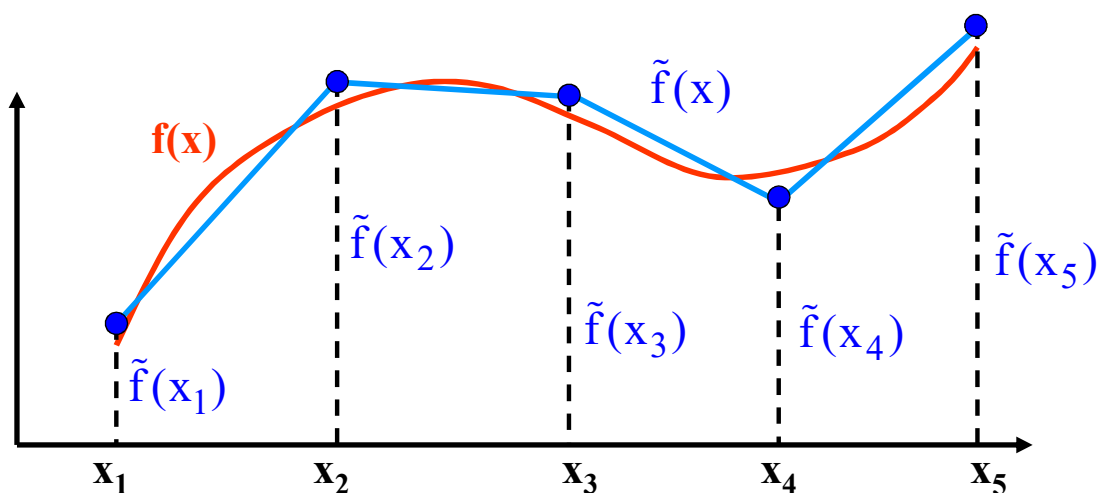
Za ovako zadane bazne funkcije aproksimacije vrijedi da je:

$$\alpha_j = \tilde{f}(x_j) \quad ; \quad \forall j$$

gdje je  $\tilde{f}(x_j)$  nepoznata vrijednost aproksimacije funkcije u j-tom čvoru.

## Lokalizacija baza, konačni elementi (6)

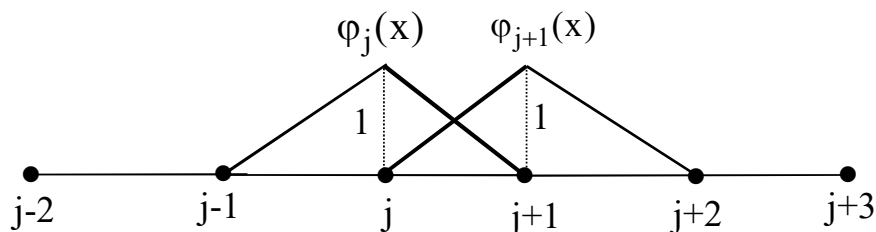
Dakle, vrijedi da je: 
$$\tilde{f}(x) = \sum_{j=1}^{NGC} \varphi_j(x) \cdot \tilde{f}(x_j)$$



Ovo je linearna aproksimacija funkcije po konačnom elementu.

## Lokalizacija baza, konačni elementi (7)

Na svakom od konačnih elemenata nalaze se dijelovi dviju baznih funkcija aproksimacije pridruženih globalnim čvorovima koji pripadaju razmatranom konačnom elementu.

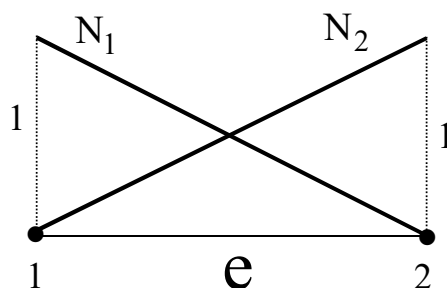


Idući važni korak je izdvajanje konačnog elementa, odnosno aproksimacija funkcije po konačnom elementu.

37

## Lokalizacija baza, konačni elementi (8)

Izdvojeni konačni element se promatra u lokalnom sustavu.



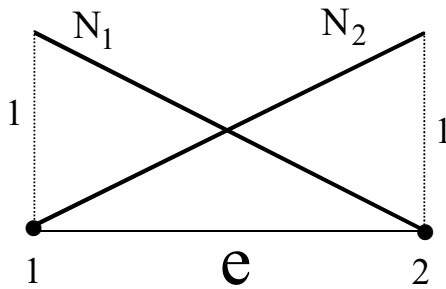
$N_1, N_2$  – oblikovne funkcije (shape function),  
interpolacijske funkcije (interpolation functions)

Oblikovne funkcije su pridružene (lokalnim) čvorovima konačnog elementa.

38

## Lokalizacija baza, konačni elementi (9)

Oblikovne funkcije su opisane Lagrangeovim interpolacijskim polinomima:



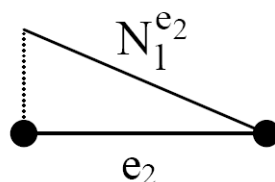
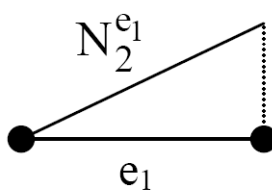
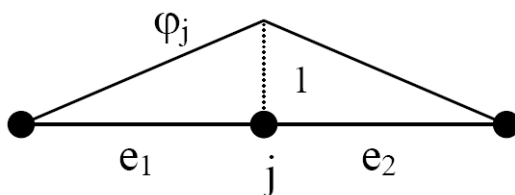
$$N_1 = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}$$

$$N_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Oblikovne funkcije  $N_1, N_2$  tvore bazu na pripadnom konačnom elementu.

39

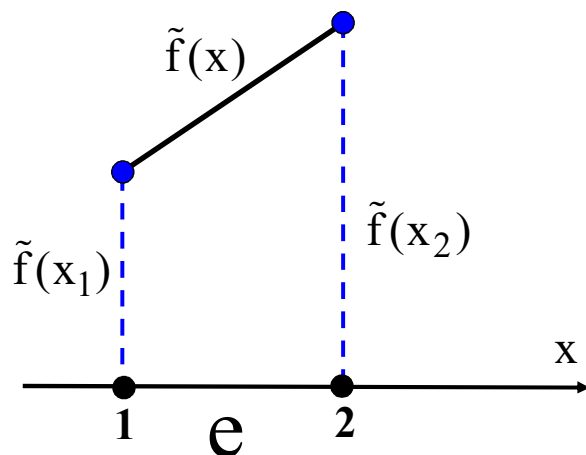
## Lokalizacija baza, konačni elementi (10)



Globalne bazne funkcije gradimo pomoću oblikovnih funkcija susjednih konačnih elemenata.

40

## Lokalizacija baza, konačni elementi (11)



Aproksimacija funkcije  $f(x)$  po dvočvornom konačnom elementu opisana je izrazom:

$$\tilde{f}(x) = \sum_{i=1}^2 N_i(x) \cdot \tilde{f}(x_i)$$

$\tilde{f}(x_1)$  – vrijednost aproksimacije funkcije u lokalnom čvoru 1

$\tilde{f}(x_2)$  – vrijednost aproksimacije funkcije u lokalnom čvoru 2

41

## Lokalizacija baza, konačni elementi (12)

Lokalne i globalne oznake čvorova povezane su pomoću tzv. matrice veze. Slijedi tablični prikaz matrice veze za dvočvorne konačne elemente.

Element br.	Lokalni čvor 1	Lokalni čvor 2
1	1	2
2	2	3
3	3	4
4	4	5

42

## Oblikovne funkcije – Lagrangeovi polinomi (1)

Aproksimacija funkcije  $f(x)$  po konačnom elementu koji ima NCE čvorova opisana je izrazom:

$$\tilde{f}(x) = \sum_{i=1}^{NCE} N_i \cdot \tilde{f}(x_i)$$

gdje je:  $N_i = N_i(x)$  - oblikovna funkcija pridružena i-tom lokalnom čvoru,

$\tilde{f}(x_i)$  – vrijednost aproksimacije funkcije u i-tom lokalnom čvoru.

## Oblikovne funkcije – Lagrangeovi polinomi (2)

Oblikovne funkcije moraju zadovoljiti sljedeće uvjete:

$$\text{a) } N_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{u i-tom lokalnom čvoru} \\ 0 & \text{u ostalim lokalnim čvorovima} \end{cases}$$

$$\text{b) } \sum_{i=1}^{NCE} N_i = 1 \quad \text{po čitavom konačnom elementu}$$

Drugi uvjet omogućuje aproksimaciju konstante.

Postavljene uvjete, između ostalog, zadovoljavaju Lagrangeovi polinomi.

## Oblikovne funkcije – Lagrangeovi polinomi (3)

Lagrangeovi interpolacijski polinomi ne osiguravaju neprekinutost prve derivacije na granici dvaju konačnih elemenata. Oni osiguravaju samo neprekinutost funkcije.

Neprekinutost derivacije, odnosno zajedničku tangentu na spoju dvaju elemenata, može se realizirati npr. Hermiteovim polinomom trećeg stupnja.

Moguće je zahtijevati i kontinuitet višeg reda. On se može ostvariti pomoću tzv. splajn funkcija (engl. *spline*). Takva aproksimacija se koristi u računalnoj grafici. U računalnoj se grafici za aproksimaciju funkcije po dijelovima koristi i Fergusonov ili Bezierov krivuljni odsječak kao i Bernsteinovi bazni polinomi.

45

## Oblikovne funkcije – Lagrangeovi polinomi (4)

Lagrangeovi interpolacijski polinomi glase:

$$N_i(x) = L_i(x) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{NCE} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$$

Prethodno je napisano da je za dvočvorne konačne elemente ( $NCE = 2$ ):

$$N_1 = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \quad ; \quad N_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

46

## Oblikovne funkcije – Lagrangeovi polinomi (5)

Lagrangeovi interpolacijski polinomi za tročvorne konačne elemente

(NCE = 3) glase:

$$N_1 = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \cdot \frac{x - x_3}{x_1 - x_3}$$

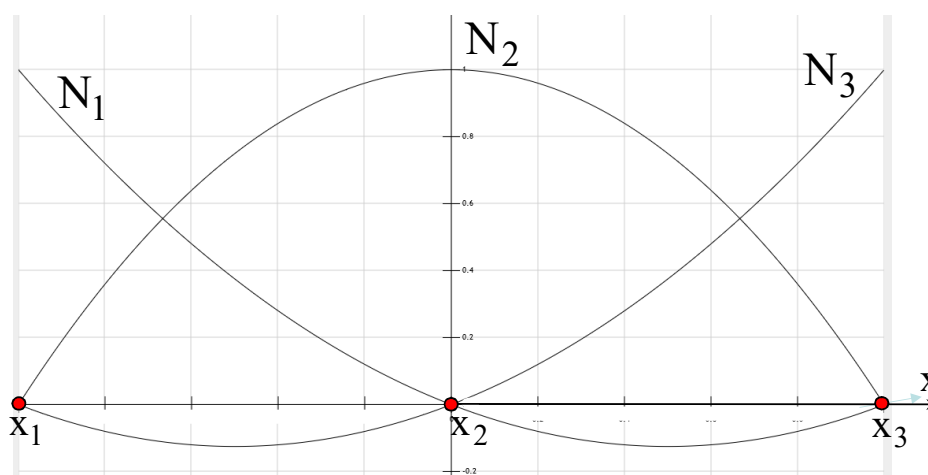
$$N_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x - x_3}{x_2 - x_3}$$

$$N_3 = \frac{x - x_1}{x_3 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_3 - x_2}$$

47

## Oblikovne funkcije – Lagrangeovi polinomi (6)

Grafički prikaz Lagrangeovih interpolacijskih polinoma za tročvorne konačne elemente (NCE = 3).



48



## Aproksimacija funkcije po MKE

Neka je zadana funkcija jedne varijable  $u = u(x)$ .

Zadanu funkciju treba aproksimirati po metodi konačnih elemenata (MKE).

Kako izračunati koeficijente matrice  $[A]$  i vektora desne strane  $\{B\}$  globalnog sustava jednažbi:

$$[A] \cdot \{\tilde{u}_g\} = \{B\}$$

Integracija po globalnom području može se raščlaniti na integraciju po elementima.

Dakle, za pojedini konačni element formira se **lokalni sustav jednažbi** tako da se Galjerkin-Bubnovljeva metoda izravno primijeni na konačni element.

49

## MKE – formiranje lokalnog sustava jednažbi (1)

Neka je aproksimacija funkcije  $u(x)$  po konačnom elementu opisana izrazom:

$$\tilde{u}(x) = \sum_{j=1}^{NCE} N_j(x) \cdot \tilde{u}(x_j) = \sum_{j=1}^{NCE} N_j \cdot \tilde{u}_j$$

50

## MKE – formiranje lokalnog sustava jednažbi (2)

Lokalni sustav jednažbi slijedi iz izraza:

$$\int_{\Omega_e} [u(x) - \tilde{u}(x)] \cdot N_i \cdot dx = 0 \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, NCE$$

$$\sum_{j=1}^{NCE} \left[ \int_{\Omega_e} N_i \cdot N_j \cdot dx \right] \cdot \tilde{u}_j = \int_{\Omega_e} N_i \cdot u(x) \cdot dx \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, NCE$$

51

## MKE – formiranje lokalnog sustava jednažbi (3)

Dakle, lokalni sustav jednažbi glasi:

$$[K] \cdot \{\tilde{u}\} = \{D\}$$

$$K_{ij} = \int_{\Omega_e} N_i(x) \cdot N_j(x) \cdot dx = \int_{\Omega_e} N_i \cdot N_j \cdot dx$$

$$D_i = \int_{\Omega_e} u(x) \cdot N_i(x) \cdot dx = \int_{\Omega_e} u(x) \cdot N_i \cdot dx$$

52

## Asembliranje (1)

Na spoju dvaju susjednih konačnih elemenata nalazi se zajednički globalni čvor. U njemu postoji kontinuitet vrijednosti funkcije.

Posljedica toga je da se lokalne jednadžbe susjednih konačnih elemenata pridružene istom globalnom čvoru u globalnom sustavu zbrajaju. To je osnova postupka asembliranja.

$$a_{mn} = \sum_{e=1}^{NEL} K_{ij}^e \quad ; \quad b_m = \sum_{e=1}^{NEL} D_i^e$$

$$m = \text{MVEZE}(e, i) \quad n = \text{MVEZE}(e, j)$$

53

## Asembliranje (2)

Definirati MVEZE (e, i) ; e = 1 to NEL; i = 1 to NCE

Nulovati globalnu matricu A i globalni vektor B

for e = 1 to NEL

    Izračunati matricu i vektor kon. elem. K(i, j) ; D(i) ; i, j = 1 to NCE

    for i = 1 to NCE

        m = MVEZE(e, i) ; B(m) = B(m) + D(i)

        for j = 1 to NCE

            n = MVEZE(e, j) ; A(m, n) = A(m, n) + K(i, j)

        end

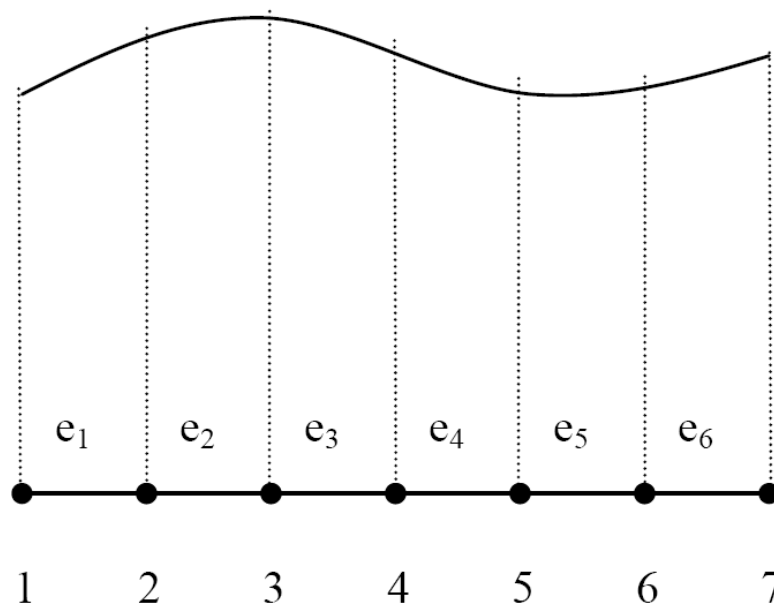
    end

end

Pseudokod algoritma za asembliranje

54

### Asembliranje (3)



Podjela područja na konačne elemente i oznake globalnih čvorova

55

### Asembliranje (4)

Element br.	Lokalni čvor 1	Lokalni čvor 2
1	1	2
2	2	3
3	3	4
4	4	5
5	5	6
6	7	6

Matrica  
veze  
prikazana  
tabelarno

$$\text{MVEZE}(6, 1) = 7 \quad ; \quad \text{MVEZE}(6, 2) = 6$$

56

## Asembliranje (5)

$K_{11}^1$	$K_{12}^1$						$\tilde{u}_1$	$D_1^1$
$K_{21}^1$	$K_{22}^1$						$\tilde{u}_2$	$D_2^1$
							$\tilde{u}_3$	
							$\tilde{u}_4$	
							$\tilde{u}_5$	
							$\tilde{u}_6$	
							$\tilde{u}_7$	

=

Uključivanje konačnog elementa broj 1 u globalni sustav

57

## Asembliranje (6)

$K_{11}^1$	$K_{12}^1$						$\tilde{u}_1$	$D_1^1$
$K_{21}^1$	$K_{22}^1 + K_{11}^2$	$K_{12}^2$					$\tilde{u}_2$	$D_2^1 + D_1^2$
	$K_{21}^2$	$K_{22}^2$					$\tilde{u}_3$	$D_2^2$
							$\tilde{u}_4$	
							$\tilde{u}_5$	
							$\tilde{u}_6$	
							$\tilde{u}_7$	

=

Uključivanje konačnog elementa broj 2 u globalni sustav

58

### Asembliranje (7)

$K_{11}^1$	$K_{12}^1$						$\tilde{u}_1$	$D_1^1$
$K_{21}^1$	$K_{22}^1 + K_{11}^2$	$K_{12}^2$					$\tilde{u}_2$	$D_2^1 + D_1^2$
	$K_{21}^2$	$K_{22}^2 + K_{11}^3$	$K_{12}^3$				$\tilde{u}_3$	$D_2^2 + D_1^3$
		$K_{21}^3$	$K_{22}^3$				$\tilde{u}_4$	$D_2^3$
							$\tilde{u}_5$	
							$\tilde{u}_6$	
							$\tilde{u}_7$	

Uključivanje konačnog elementa broj 3 u globalni sustav

### Asembliranje (8)

$K_{11}^1$	$K_{12}^1$						$\tilde{u}_1$	$D_1^1$
$K_{21}^1$	$K_{22}^1 + K_{11}^2$	$K_{12}^2$					$\tilde{u}_2$	$D_2^1 + D_1^2$
	$K_{21}^2$	$K_{22}^2 + K_{11}^3$	$K_{12}^3$				$\tilde{u}_3$	$D_2^2 + D_1^3$
		$K_{21}^3$	$K_{22}^3 + K_{11}^4$	$K_{12}^4$			$\tilde{u}_4$	$D_2^3 + D_1^4$
			$K_{21}^4$	$K_{22}^4$			$\tilde{u}_5$	$D_2^4$
							$\tilde{u}_6$	
							$\tilde{u}_7$	

Uključivanje konačnog elementa broj 4 u globalni sustav

### Asembliranje (9)

$K_{11}^1$	$K_{12}^1$						$\tilde{u}_1$	$D_1^1$
$K_{21}^1$	$K_{22}^1 + K_{11}^2$	$K_{12}^2$					$\tilde{u}_2$	$D_2^1 + D_1^2$
	$K_{21}^2$	$K_{22}^2 + K_{11}^3$	$K_{12}^3$				$\tilde{u}_3$	$D_2^2 + D_1^3$
		$K_{21}^3$	$K_{22}^3 + K_{11}^4$	$K_{12}^4$			$\tilde{u}_4$	$D_2^3 + D_1^4$
			$K_{21}^4$	$K_{22}^4 + K_{11}^5$	$K_{12}^5$		$\tilde{u}_5$	$D_2^4 + D_1^5$
				$K_{21}^5$	$K_{22}^5$		$\tilde{u}_6$	$D_2^5$
							$\tilde{u}_7$	

Uključivanje konačnog elementa broj 5 u globalni sustav

61

### Asembliranje (10)

$K_{11}^1$	$K_{12}^1$						$\tilde{u}_1$	$D_1^1$
$K_{21}^1$	$K_{22}^1 + K_{11}^2$	$K_{12}^2$					$\tilde{u}_2$	$D_2^1 + D_1^2$
	$K_{21}^2$	$K_{22}^2 + K_{11}^3$	$K_{12}^3$				$\tilde{u}_3$	$D_2^2 + D_1^3$
		$K_{21}^3$	$K_{22}^3 + K_{11}^4$	$K_{12}^4$			$\tilde{u}_4$	$D_2^3 + D_1^4$
			$K_{21}^4$	$K_{22}^4 + K_{11}^5$	$K_{12}^5$		$\tilde{u}_5$	$D_2^4 + D_1^5$
				$K_{21}^5$	$K_{22}^5 + K_{22}^6$	$K_{21}^6$	$\tilde{u}_6$	$D_2^5 + D_2^6$
					$K_{12}^6$	$K_{11}^6$	$\tilde{u}_7$	$D_1^6$

Uključivanje konačnog elementa broj 6 u globalni sustav

62

## Rubni uvjeti – rješavanje globalnog sustava jednažbi

Rubni uvjeti se zadovoljavaju, ako ih želimo zadovoljiti, na kraju kad se u potpunosti formira globalni sustav jednažbi.

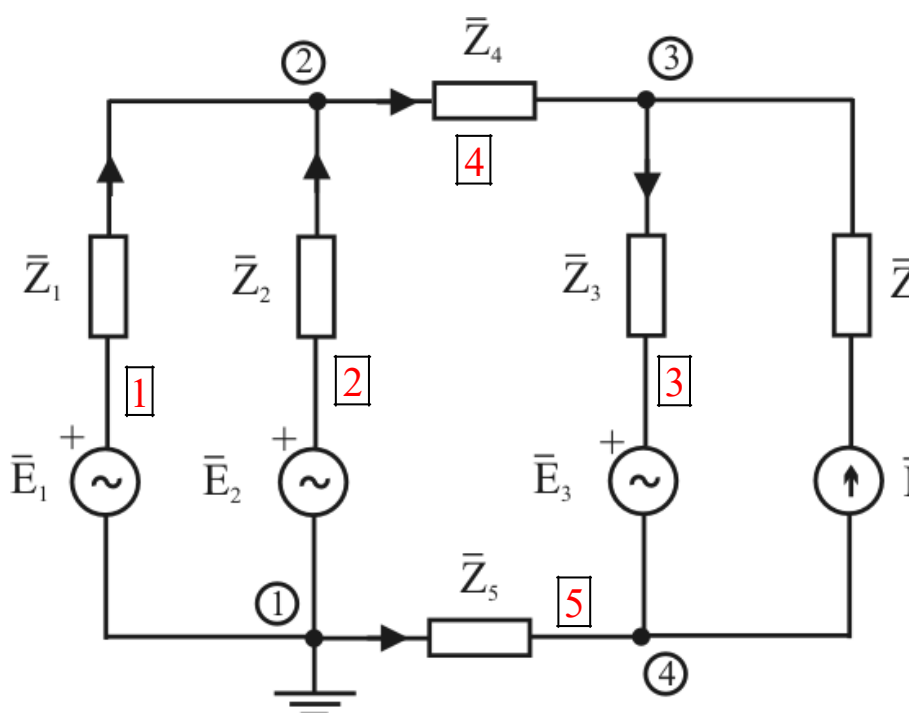
Svakom globalnom (lokalnom) čvoru pridružena je jedna globalna (lokalna) jednažba.

Neke od mogućih metoda za rješavanje globalnog sustava jednažbi:

- Gaussova eliminacija
- Cholesky dekompozicija
- Pojasna matrica uz Gaussovu eliminaciju
- Polupojasna matrica uz Gaussovu eliminaciju
- Frontalna tehnika
- Blokovski algoritmi (slabo popunjene matrice)
- LU dekompozicija – LAPACK fortranski podprogrami

63

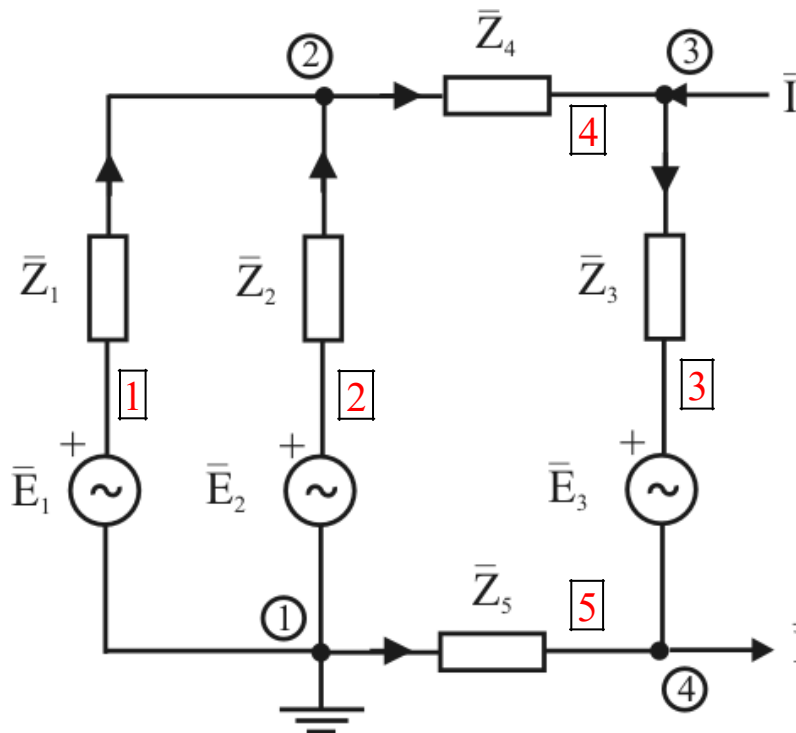
## TKE - Modeliranje izmjeničnih električnih mreža (1)



64



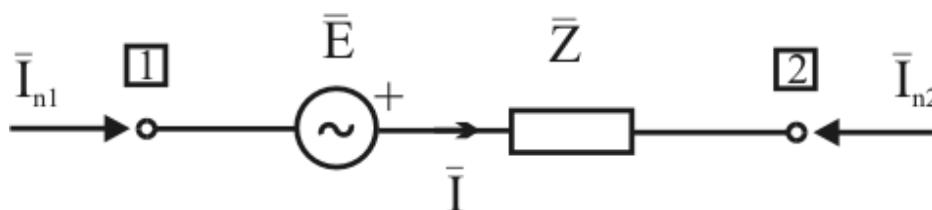
## TKE - Modeliranje izmjeničnih električnih mreža (2)



Grane sa strujnim izvorima se izbacuju.

65

## TKE - Modeliranje izmjeničnih električnih mreža (3)

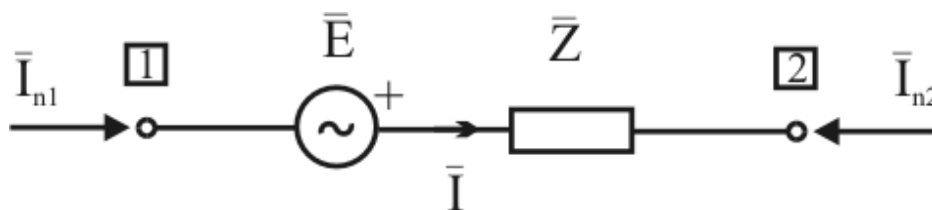


Potpuni lokalni sustav jednažbi za granu (konačni element) glasi:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\bar{Z}} & -\frac{1}{\bar{Z}} \\ -\frac{1}{\bar{Z}} & \frac{1}{\bar{Z}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\Phi}_1 \\ \bar{\Phi}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\bar{E}}{\bar{Z}} \\ \frac{\bar{E}}{\bar{Z}} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{I}_{n1} \\ \bar{I}_{n2} \end{Bmatrix}$$

66

## TKE - Modeliranje izmjeničnih električnih mreža (4)

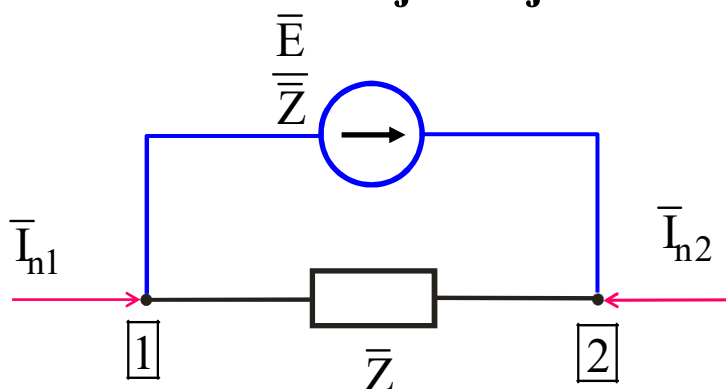


Nepotpuni lokalni sustav jednačbi za granu (konačni element) glasi:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\bar{Z}} & -\frac{1}{\bar{Z}} \\ -\frac{1}{\bar{Z}} & \frac{1}{\bar{Z}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\varphi}_1 \\ \bar{\varphi}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\bar{E}}{\bar{Z}} \\ \frac{\bar{E}}{\bar{Z}} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

67

## TKE - Modeliranje izmjeničnih električnih mreža (5)



Nadomjesna shema

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\bar{Z}} & -\frac{1}{\bar{Z}} \\ -\frac{1}{\bar{Z}} & \frac{1}{\bar{Z}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\varphi}_1 \\ \bar{\varphi}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\bar{E}}{\bar{Z}} \\ \frac{\bar{E}}{\bar{Z}} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{I}_{n1} \\ \bar{I}_{n2} \end{Bmatrix}$$

Potpuni lokalni sustav jednačbi

68

## TKE - Modeliranje izmjeničnih električnih mreža (6)

U matričnom zapisu, nepotpuni lokalni sustav jednažbi glasi:

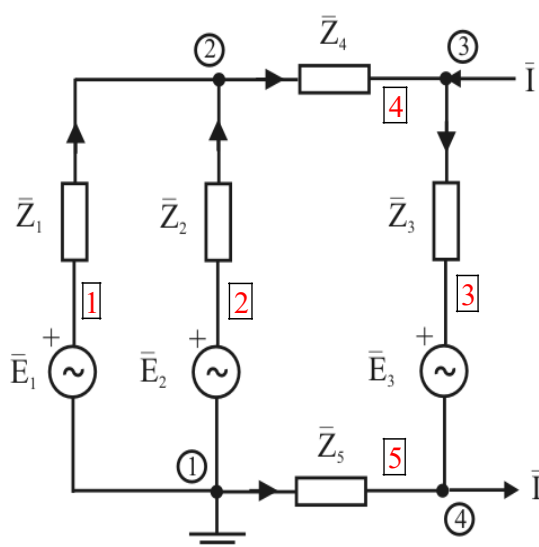
$$\left[ \bar{A}_{loc} \right] \cdot \{ \bar{\varphi}_{loc} \} = \{ \bar{D}_{loc} \} + \{ 0 \}$$

Na osnovi matrice veze, asembliraju se nepotpuni lokalni sustavi jednažbi. Tim se postupkom dobije nepotpuni globalni sustav jednažbi:

$$\left[ \bar{A}_g \right] \{ \bar{\varphi}_g \} = \{ \bar{D}_g \} + \{ 0 \}$$

69

## TKE - Modeliranje izmjeničnih električnih mreža (7)



Redni broj grane (kon. el.)	Lokalni čvor 1	Lokalni čvor 2
1	1	2
2	1	2
3	3	4
4	2	3
5	1	4

70

## TKE - Modeliranje izmjeničnih električnih mreža (8)

Slijedi injektiranje globalnih struja u globalne čvorove:

$$[\bar{A}_g] \{\bar{\phi}_g\} = \{\bar{D}_g\} + \{\bar{I}_g\} = \{\bar{R}_g\}$$

Električna mreža mora imati (najmanje) jedan referentni čvor s propisanim nultim potencijalom. Treba intervenirati u globalnom sustavu jednačbi.

Zadavanje nultog potencijala  $i$ -tog čvora u MATLAB zapisu glasi:

$$A_g(1:N, i) = 0$$

$$A_g(i, 1:N) = 0$$

$$A_g(i, i) = 1$$

$$R_g(i) = 0$$

71

## TKE - Modeliranje izmjeničnih električnih mreža (9)

- Rješenjem potpunog globalnog sustava jednačbi dobiju se potencijali svih globalnih čvorova, a time i potencijali svih lokalnih čvorova.
- Iz potpunog lokalnog sustava jednačbi pojedine grane izračunaju se struje koje ulaze u čvorove konačnog elementa.
- Prema uvedenoj pretpostavci, struja razmatrane grane jednaka je struji koja ulazi u lokalni čvor 1 te grane (konačnog elementa).

72

## ATP-EMTP programski paket

EMTP (Electromagnetic Transients Program) se smatra jednim od najkorištenijih programa za digitalnu simulaciju elektromagnetskih i elektromehaničkih prijelaznih pojava. Prvotno ga je razvio Dr. Hermann Dommel kasnih 1960-tih godina.

ATP – EMTP (ATP - Alternative Transients Program) je jedna od verzija programskog paketa EMTP.

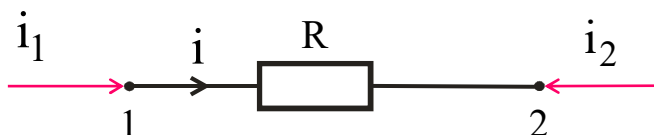
ATPDraw je grafički predprocesor za ATP – EMTP programski paket, a razvijen je i drugi grafički predprocesor ATPDesigner.

U daljnjem tekstu bit će reinterpetirana numerička podloga programskog paketa ATP – EMTP i to iz perspektive tehnike konačnih elemenata.

73

## ATP-EMTP – lokalni sustavi jednadžbi (1)

### Lokalni sustav jednadžbi za otpor R



$$u_{12} = u_1 - u_2 = R \cdot i$$

$$u = u(t)$$

$$u^+ = u(t + \Delta t)$$

Za lokalne čvorove 1 i 2 u trenutku  $t + \Delta t$  vrijedi da je:

$$u_1^+ - u_2^+ = R \cdot i_1^+$$

$$u_2^+ - u_1^+ = R \cdot i_2^+$$

Kod strujnih krugova:

$$u_i \equiv \varphi_i$$

$$u_i^+ \equiv \varphi_i^+$$

74

## ATP-EMTP – lokalni sustavi jednažbi (2)

U matričnom zapisu potpuni lokalni sustav jednažbi glasi:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R} & -\frac{1}{R} \\ -\frac{1}{R} & \frac{1}{R} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1^+ \\ u_2^+ \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} i_1^+ \\ i_2^+ \end{Bmatrix}$$

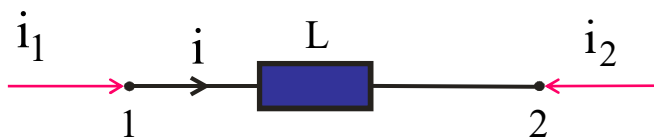
Nepotpuni lokalni sustav jednažbi za otpor R glasi:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R} & -\frac{1}{R} \\ -\frac{1}{R} & \frac{1}{R} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1^+ \\ u_2^+ \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

75

## ATP-EMTP – lokalni sustavi jednažbi (3)

### Lokalni sustav jednažbi za induktivitet L



$$u_{12} = u_1 - u_2 = L \cdot \frac{di}{dt}$$

Vrijedi da je:

$$u_{12} = u_1 - u_2 = L \cdot \frac{di_1}{dt}$$

$$u_{21} = u_2 - u_1 = L \cdot \frac{di_2}{dt}$$

Kod strujnih krugova:

$$u_i \equiv \varphi_i$$

$$u_i^+ \equiv \varphi_i^+$$

76

## ATP-EMTP – lokalni sustavi jednadžbi (4)

U programskom paketu ATP-EMTP, referentni trenutak za formiranje lokalnog sustava jednadžbi za induktivitet  $L$  je trenutak na sredini intervala  $[t, t + \Delta t]$ . Za lokalne čvorove 1 i 2 u referentnom trenutku vrijedi da je:

$$\frac{u_{12}^+ + u_{12}}{2} = \frac{u_1^+ + u_1}{2} - \frac{u_2^+ + u_2}{2} = L \cdot \frac{i_1^+ - i_1}{\Delta t}$$

$$\frac{u_{21}^+ + u_{21}}{2} = \frac{u_2^+ + u_2}{2} - \frac{u_1^+ + u_1}{2} = L \cdot \frac{i_2^+ - i_2}{\Delta t}$$

## ATP-EMTP – lokalni sustavi jednadžbi (5)

Koriste se aproksimacija:

$$\frac{di}{dt} \approx \frac{\Delta i}{\Delta t} = \frac{i(t + \Delta t) - i}{\Delta t} = \frac{i^+ - i}{\Delta t}$$

$$i = i(t)$$

$$i^+ = i(t + \Delta t)$$

## ATP-EMTP – lokalni sustavi jednadžbi (6)

U matričnom zapisu potpuni lokalni sustav jednadžbi glasi:

$$\begin{bmatrix} \frac{\Delta t}{2 \cdot L} & -\frac{\Delta t}{2 \cdot L} \\ -\frac{\Delta t}{2 \cdot L} & \frac{\Delta t}{2 \cdot L} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1^+ \\ u_2^+ \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\Delta t}{2 \cdot L} \cdot (u_2 - u_1) - i_1 \\ \frac{\Delta t}{2 \cdot L} \cdot (u_1 - u_2) - i_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} i_1^+ \\ i_2^+ \end{Bmatrix}$$

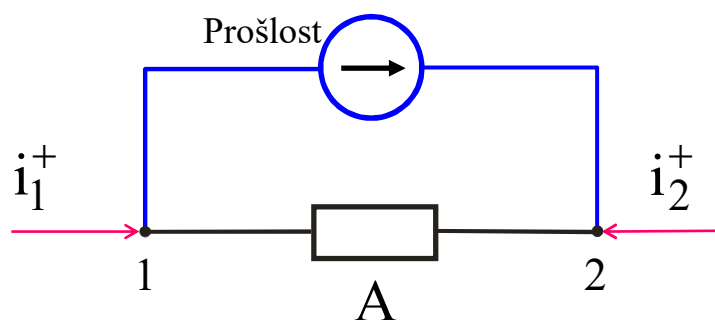
Nepotpuni lokalni sustav jednadžbi za induktivitet L glasi:

$$\begin{bmatrix} \frac{\Delta t}{2 \cdot L} & -\frac{\Delta t}{2 \cdot L} \\ -\frac{\Delta t}{2 \cdot L} & \frac{\Delta t}{2 \cdot L} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1^+ \\ u_2^+ \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\Delta t}{2 \cdot L} \cdot (u_2 - u_1) - i_1 \\ \frac{\Delta t}{2 \cdot L} \cdot (u_1 - u_2) - i_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

79

## ATP-EMTP – lokalni sustavi jednadžbi (7)

Može se formirati nadomjesna shema:



Pripadni potpuni lokalni sustav jednadžbi:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{A} & -\frac{1}{A} \\ -\frac{1}{A} & \frac{1}{A} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1^+ \\ u_2^+ \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\text{Prošlost} \\ \text{Prošlost} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} i_1^+ \\ i_2^+ \end{Bmatrix}$$

80



## ATP-EMTP – lokalni sustavi jednadžbi (8)

Dakle, u matričnom zapisu potpuni lokalni sustav jednadžbi glasi:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{A} & -\frac{1}{A} \\ -\frac{1}{A} & \frac{1}{A} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1^+ \\ u_2^+ \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\text{Prošlost} \\ \text{Prošlost} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} i_1^+ \\ i_2^+ \end{Bmatrix}$$

što znači da pripadni nepotpuni lokalni sustav jednadžbi glasi:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{A} & -\frac{1}{A} \\ -\frac{1}{A} & \frac{1}{A} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1^+ \\ u_2^+ \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\text{Prošlost} \\ \text{Prošlost} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

81

## ATP-EMTP – lokalni sustavi jednadžbi (9)

Do istog lokalnog sustava jednadžbi može se doći i na drugi način.

Diferencijalne jednadžbe:

$$u_{12} = u_1 - u_2 = L \cdot \frac{d i_1}{d t}$$

$$u_{21} = u_2 - u_1 = L \cdot \frac{d i_2}{d t}$$

preinače se u integralne jednadžbe, koje se riješe pomoću trapeznog pravila.

82

## ATP-EMTP – lokalni sustavi jednažbi (10)

Formiraju se jednažbe za struje lokalnih čvorova i primijeni trapezno pravilo:

$$i_1^+ = \frac{1}{L} \cdot \int_t^{t+\Delta t} u_{12} \cdot dt + i_1 = \frac{\Delta t}{2 \cdot L} \cdot (u_{12} + u_{12}^+) + i_1$$

$$i_2^+ = \frac{1}{L} \cdot \int_t^{t+\Delta t} u_{21} \cdot dt + i_2 = \frac{\Delta t}{2 \cdot L} \cdot (u_{21} + u_{21}^+) + i_2$$

83

## ATP-EMTP – lokalni sustavi jednažbi (11)

Nakon sređivanja jednažbi, slijedi da je:

$$\frac{\Delta t}{2 \cdot L} \cdot u_{12}^+ = - \frac{\Delta t}{2 \cdot L} \cdot u_{12} - i_1 + i_1^+$$

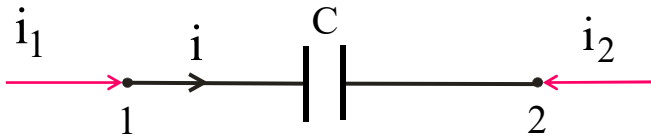
$$\frac{\Delta t}{2 \cdot L} \cdot u_{21}^+ = - \frac{\Delta t}{2 \cdot L} \cdot u_{21} - i_2 + i_2^+$$

Ako se naponi grane  $u_{12}$  i  $u_{21}$  zamijene razlikom napona čvorova te grane, onda se dobije potpuni lokalni sustav jednažbi identičan prethodno dobivenom sustavu.

84

## ATP-EMTP – lokalni sustavi jednažbi (12)

### Lokalni sustav jednažbi za kapacitet C



$$i = C \cdot \frac{du_{12}}{dt}$$

Vrijedi da je:

$$i_1 = C \cdot \frac{d u_{12}}{d t}$$

Kod strujnih krugova:

$$u_i \equiv \varphi_i$$

$$i_2 = C \cdot \frac{d u_{21}}{d t}$$

$$u_i^+ \equiv \varphi_i^+$$

85

## ATP-EMTP – lokalni sustavi jednažbi (13)

U programskom paketu ATP-EMTP, referentni trenutak za formiranje lokalnog sustava jednažbi za kapacitet C je trenutak na sredini intervala  $[t, t + \Delta t]$ . Za lokalne čvorove 1 i 2 u referentnom trenutku vrijedi da je:

$$\frac{i_1^+ + i_1}{2} = C \cdot \frac{u_{12}^+ - u_{12}}{\Delta t} = \frac{C}{\Delta t} \cdot \left[ (u_1^+ - u_2^+) - (u_1 - u_2) \right]$$

$$\frac{i_2^+ + i_2}{2} = C \cdot \frac{u_{21}^+ - u_{21}}{\Delta t} = \frac{C}{\Delta t} \cdot \left[ (u_2^+ - u_1^+) - (u_2 - u_1) \right]$$

86

## ATP-EMTP – lokalni sustavi jednažbi (14)

U matričnom zapisu potpuni lokalni sustav jednažbi glasi:

$$\begin{bmatrix} \frac{2 \cdot C}{\Delta t} & -\frac{2 \cdot C}{\Delta t} \\ -\frac{2 \cdot C}{\Delta t} & \frac{2 \cdot C}{\Delta t} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1^+ \\ u_2^+ \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{2 \cdot C}{\Delta t} \cdot (u_1 - u_2) + i_1 \\ \frac{2 \cdot C}{\Delta t} \cdot (u_2 - u_1) + i_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} i_1^+ \\ i_2^+ \end{Bmatrix}$$

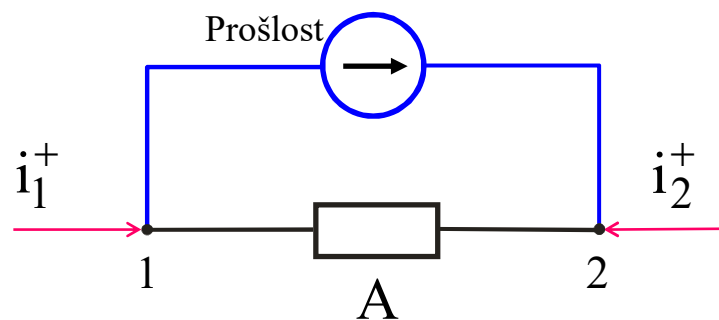
Nepotpuni lokalni sustav jednažbi za kapacitet C glasi:

$$\begin{bmatrix} \frac{2 \cdot C}{\Delta t} & -\frac{2 \cdot C}{\Delta t} \\ -\frac{2 \cdot C}{\Delta t} & \frac{2 \cdot C}{\Delta t} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1^+ \\ u_2^+ \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{2 \cdot C}{\Delta t} \cdot (u_1 - u_2) + i_1 \\ \frac{2 \cdot C}{\Delta t} \cdot (u_2 - u_1) + i_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

87

## ATP-EMTP – lokalni sustavi jednažbi (15)

Može se formirati nadomjesna shema:



Pripadni potpuni lokalni sustav jednažbi:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{A} & -\frac{1}{A} \\ -\frac{1}{A} & \frac{1}{A} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \phi_1^+ \\ \phi_2^+ \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\text{Prošlost} \\ \text{Prošlost} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} i_1^+ \\ i_2^+ \end{Bmatrix}$$

88

## ATP-EMTP – lokalni sustavi jednažbi (16)

Do istog lokalnog sustava jednažbi može se doći i na drugi način. Diferencijalne jednažbe se preinače u integralne jednažbe i potom na njih primijeni trapezno pravilo:

$$\Rightarrow u_{12}^+ = \frac{1}{C} \cdot \int_t^{t+\Delta t} i_1 \cdot dt + u_{12}$$

$$u_{21}^+ = \frac{1}{C} \cdot \int_t^{t+\Delta t} i_2 \cdot dt + u_{21}$$

89

## ATP-EMTP – lokalni sustavi jednažbi (17)

Nakon što se primijeni trapezno pravilo, dobije se da je:

$$u_{12}^+ = \frac{\Delta t}{2 \cdot C} \cdot (i_1 + i_1^+) + u_{12}$$

$$u_{21}^+ = \frac{\Delta t}{2 \cdot C} \cdot (i_2 + i_2^+) + u_{21}$$

90

## ATP-EMTP – lokalni sustavi jednažbi (18)

Nakon sređivanja jednažbi, slijedi da je:

$$\frac{2 \cdot C}{\Delta t} \cdot u_{12}^+ = \frac{2 \cdot C}{\Delta t} \cdot u_{12} + i_1 + i_1^+$$

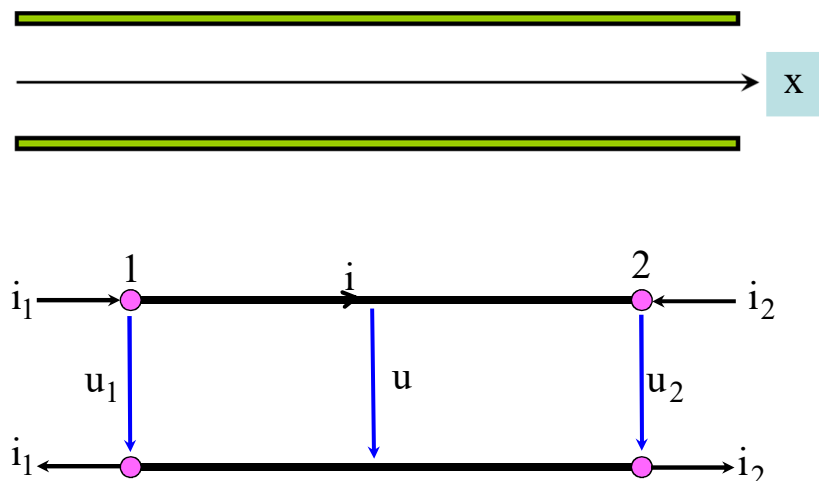
$$\frac{2 \cdot C}{\Delta t} \cdot u_{21}^+ = \frac{2 \cdot C}{\Delta t} \cdot u_{21} + i_2 + i_2^+$$

Ako se naponi grane  $u_{12}$  i  $u_{21}$  zamijene razlikom napona čvorova te grane, onda se dobije potpuni lokalni sustav jednažbi identičan prethodno dobivenom sustavu.

91

## ATP-EMTP – lokalni sustavi jednažbi (19)

Dionica (segment) dvožičnog voda – distribuirani parametri

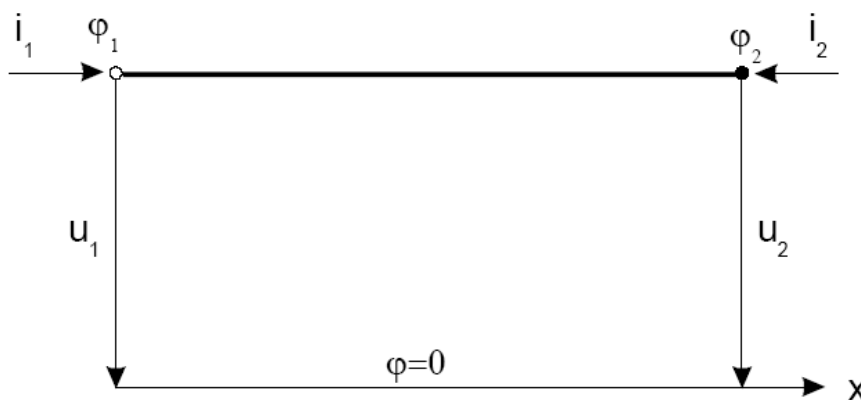


Dionica (segment) dvožičnog voda duljine  $\ell$

92

## ATP-EMTP – lokalni sustavi jednažbi (20)

Dionica (segment) jednožičnog voda – distribuirani parametri



Dionica (segment) jednožičnog voda duljine  $\ell$

Za jednožični i za dvožični vod sustav jednažbi ima isti oblik.  
U slučaju jednožičnog voda može se koristiti funkcija potencijala umjesto (poprečnog) napona.

93

## ATP-EMTP – lokalni sustavi jednažbi (21)



Koristi se TLM (Transmission Line Model), a parametri voda su:

R - jedinični (uzdužni) radni otpor segmenta voda [ $\Omega/m$ ]

L - jedinični induktivitet segmenta voda [ $H/m$ ]

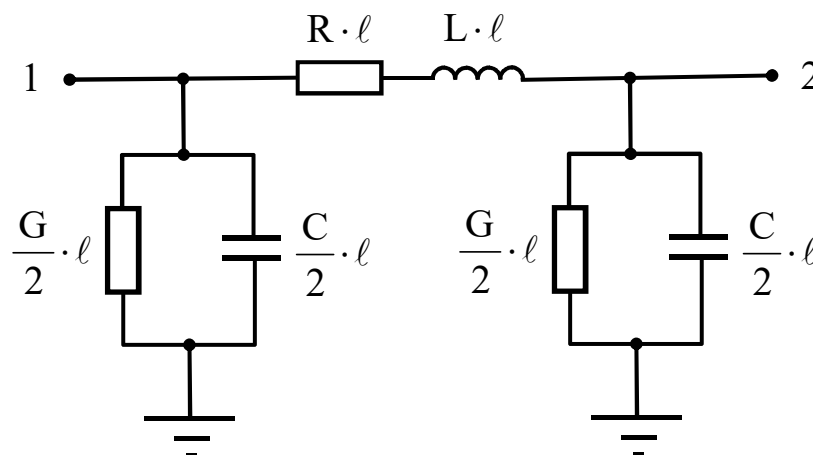
C - jedinični kapacitet segmenta voda [ $F/m$ ]

G - jedinični odvod (poprečna vodljivost) segmenta voda [ $S/m$ ]

94

## ATP-EMTP – lokalni sustavi jednadžbi (22)

Kod niskih frekvencija, segment voda se može aproksimirati pomoću koncentriranih parametara, npr. pomoću  $\pi$  sheme:



95

## ATP-EMTP – lokalni sustavi jednadžbi (23)

Kod tranzijentne analize, mora se uzeti da su parametri voda distribuirani.

Širenje vala duž segmenta voda opisano je jednadžbama:

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = R \cdot i + L \cdot \frac{\partial i}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = G \cdot u + C \cdot \frac{\partial u}{\partial t}$$

U ATP-EMTP nije razvijen softverski alat za rješavanje ovih jednadžbi. Koristi se pojednostavljeni model voda, tzv. vod bez gubitaka. Problem se može uspješno riješiti kombinacijom tehnike konačnih elemenata i metode karakteristika (R. Lucić, FESB, doktorat).

96



## ATP-EMTP – lokalni sustavi jednadžbi (24)

Vod bez gubitaka  $\Rightarrow R = G = 0$ . Tada telegrafske jednadžbe poprimaju jednostavniji oblik:

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = L \cdot \frac{\partial i}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = C \cdot \frac{\partial u}{\partial t}$$

Kada se radi o vodu bez gubitaka, onda govorimo o **Bergeronovoj metodi**. Ova metoda je prije široke primjene računala bila zasnovana na grafičkom postupku, dok je danas postupak numerički.

97

## ATP-EMTP – lokalni sustavi jednadžbi (25)

D'Alambertovo rješenje za sustav jednadžbi segmenta voda bez gubitaka glasi:

$$i = F(x - v \cdot t) - f(x + v \cdot t)$$

$$u = Z \cdot F(x - v \cdot t) + Z \cdot f(x + v \cdot t)$$

gdje je:

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}} \text{ - valna impedancija voda}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \text{ - brzina širenja vala}$$

98

## ATP-EMTP – lokalni sustavi jednadžbi (26)

Iz D'Alambertovog rješenja slijedi da je:

$$u + Z \cdot i = 2 \cdot Z \cdot F(x - v \cdot t)$$

Lako se vidi da vrijedi:

$$x - v \cdot t = \text{konst.} \quad \Rightarrow \quad u + Z \cdot i = \text{konst.}$$

Neka je vrijeme preleta vala, odnosno vrijeme potrebno da val stigne s jednog kraja voda na drugi kraj, definirano izrazom:

$$\tau = \frac{\text{duljina segmenta voda}}{v} = \frac{\ell}{v}$$

99

## ATP-EMTP – lokalni sustavi jednadžbi (27)



Iz

$$u + Z \cdot i = \text{konst.} \quad \text{za} \quad x - v \cdot t = \text{konst.}$$

slijedi da za segment voda bez gubitaka vrijedi da je:

$$u_2(t + \Delta t - \tau) + Z \cdot i_2(t + \Delta t - \tau) = u_1(t + \Delta t) - Z \cdot i_1(t + \Delta t)$$

$$u_1(t + \Delta t - \tau) + Z \cdot i_1(t + \Delta t - \tau) = u_2(t + \Delta t) - Z \cdot i_2(t + \Delta t)$$

100

## ATP-EMTP – lokalni sustavi jednažbi (28)

Nakon sređivanja sustava jednažbi, imamo da je:

$$\frac{1}{Z} \cdot u_1(t + \Delta t) = \frac{1}{Z} \cdot u_2(t + \Delta t - \tau) + i_2(t + \Delta t - \tau) + i_1(t + \Delta t)$$

$$\frac{1}{Z} \cdot u_2(t + \Delta t) = \frac{1}{Z} \cdot u_1(t + \Delta t - \tau) + i_1(t + \Delta t - \tau) + i_2(t + \Delta t)$$

101

## ATP-EMTP – lokalni sustavi jednažbi (29)

U matričnom zapisu potpuni lokalni sustav jednažbi glasi:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{Z} & 0 \\ 0 & \frac{1}{Z} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1^+ \\ u_2^+ \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{Z} \cdot u_2(t + \Delta t - \tau) + i_2(t + \Delta t - \tau) \\ \frac{1}{Z} \cdot u_1(t + \Delta t - \tau) + i_1(t + \Delta t - \tau) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} i_1^+ \\ i_2^+ \end{Bmatrix}$$

Nepotpuni lokalni sustav jednažbi za segment voda bez gubitaka glasi:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{Z} & 0 \\ 0 & \frac{1}{Z} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1^+ \\ u_2^+ \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{Z} \cdot u_2(t + \Delta t - \tau) + i_2(t + \Delta t - \tau) \\ \frac{1}{Z} \cdot u_1(t + \Delta t - \tau) + i_1(t + \Delta t - \tau) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

102

## ATP-EMTP – lokalni sustavi jednažbi (30)

Dakle, u matričnom zapisu potpuni lokalni sustav jednažbi glasi:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{Z} & 0 \\ 0 & \frac{1}{Z} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1^+ \\ u_2^+ \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \text{Prošlost 1} \\ \text{Prošlost 2} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} i_1^+ \\ i_2^+ \end{Bmatrix}$$

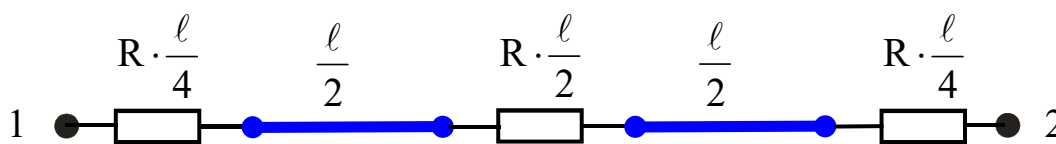
$$\text{Prošlost 1} = \frac{1}{Z} \cdot u_2(t + \Delta t - \tau) + i_2(t + \Delta t - \tau)$$

$$\text{Prošlost 2} = \frac{1}{Z} \cdot u_1(t + \Delta t - \tau) + i_1(t + \Delta t - \tau)$$

103

## ATP-EMTP – lokalni sustavi jednažbi (31)

U ATP-EMTP uzdužni otpor segmenta voda naknadno se uključuje u proračun na način prikazan slikom:

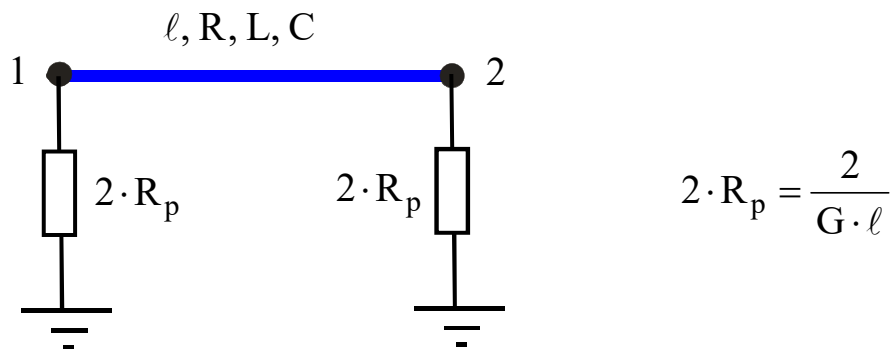


Polovina segmenta voda bez gubitaka

104

## ATP-EMTP – lokalni sustavi jednažbi (32)

Kod modeliranja uzemljivačkog sustava potrebno je dodati i odvod, odnosno ukupnu poprečni otpor segmenta vodiča ( $R_p$ ).



105

## ATP-EMTP – lokalni sustavi jednažbi (33)

Potpuni lokalni sustav jednažbi konačnog elementa dodanog u čvor 1 glasi:

$$\left[ \frac{1}{2 \cdot R_p} \right] \cdot \{u_1^+\} = \{i_1^+\} \quad u_1^+ \equiv \phi_1^+$$

Nepotpuni lokalni sustav jednažbi konačnog elementa dodanog u čvor 1 glasi:

$$\left[ \frac{1}{2 \cdot R_p} \right] \cdot \{u_1^+\} = \{0\}$$

106

## ATP-EMTP – lokalni sustavi jednažbi (34)

Potpuni lokalni sustav jednažbi konačnog elementa dodanog u čvor 2 glasi:

$$\left[ \frac{1}{2 \cdot R_p} \right] \cdot \{u_2^+\} = \{i_2^+\} \quad u_2^+ \equiv \varphi_2^+$$

Nepotpuni lokalni sustav jednažbi konačnog elementa dodanog u čvor 2 glasi:

$$\left[ \frac{1}{2 \cdot R_p} \right] \cdot \{u_2^+\} = \{0\}$$

107

## ATP-EMTP – lokalni sustavi jednažbi (35)

Osnovna mana ATP-EMTP programa, odnosno TLM pristupa:

Nije moguće izravno uzeti u račun međusobnu elektromagnetsku spregu među različitim segmentima voda. To je pogotovo važno kod modeliranja mrežastog uzemljivača.

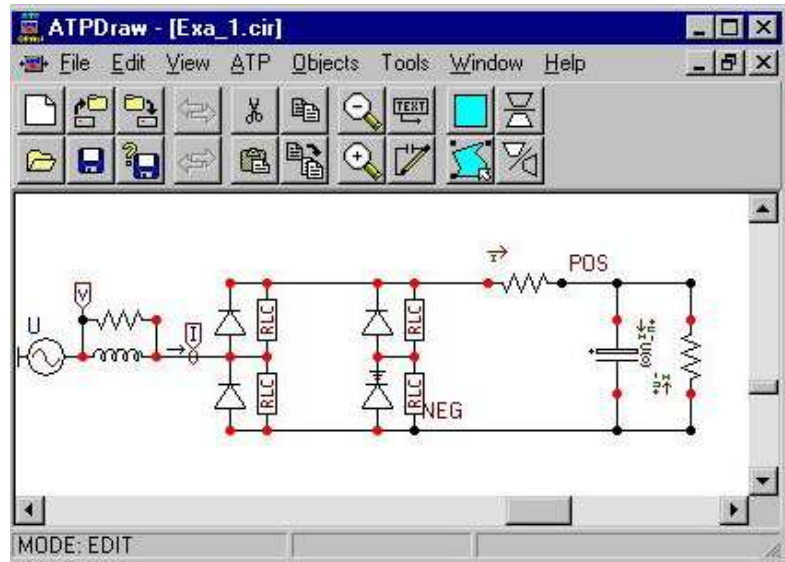
Elektromagnetska sprega između faza višefaznog voda uzima se u račun pomoću tzv. modalne analize.

108

## Programski paket ATP-EMTP

Osnovne podatke o programskom paketu ATP-EMTP mogu se pronaći na adresi: [www.eeug.de](http://www.eeug.de)

Grafički  
predprocesor je  
programski paket  
ATPDraw



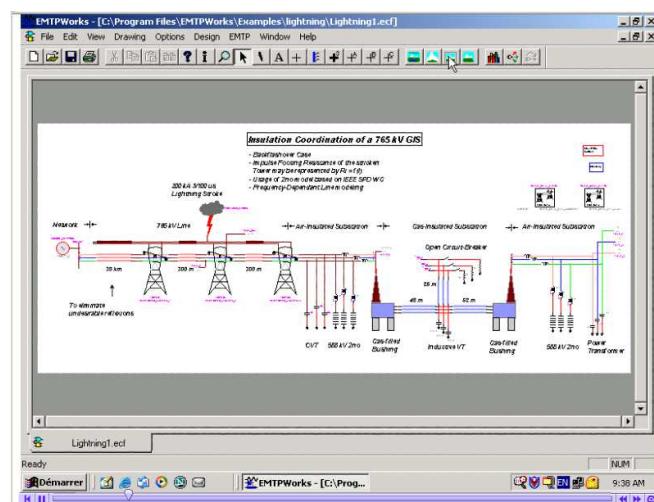
109

## Programski paket EMTP-RV (1)

EMTP-RV je preprogramirana verzija programskog paketa EMTP.

[http://www.emtp.com/software/emtp\\_rv.html](http://www.emtp.com/software/emtp_rv.html)

Njegovo  
grafičko  
sučelje je  
EMTPWorks.

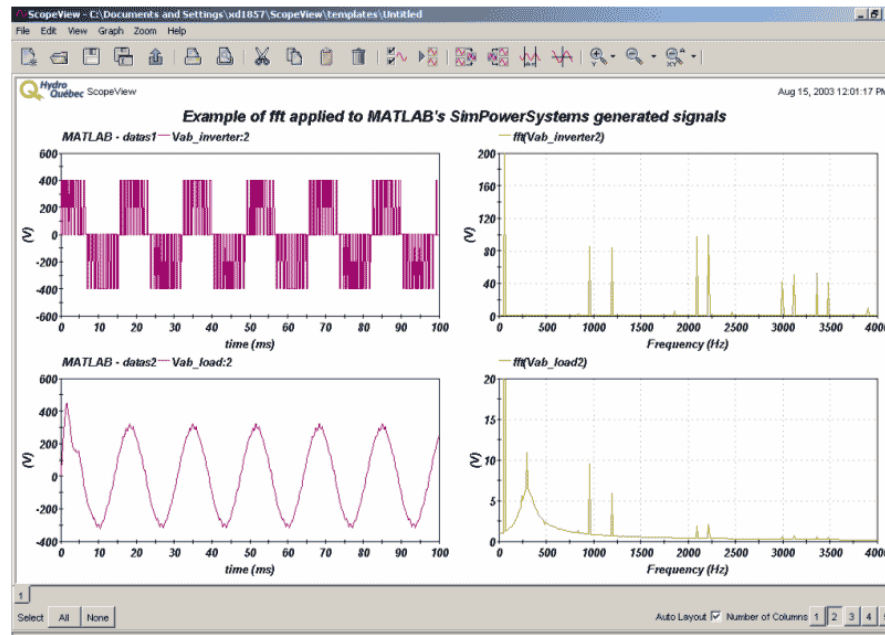


<http://www.emtp.com/software/pop/lightning.html>

110

## Programski paket EMTP-RV (2)

ScopeView je postprocesor programskog paketa EMTP-RV.

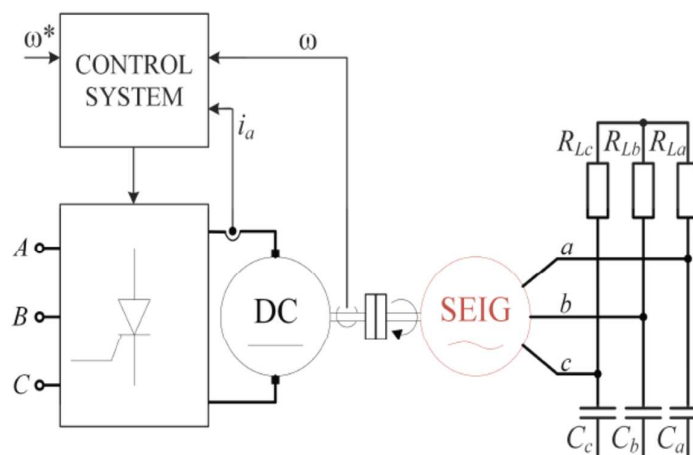


111

## TKE – Analiza regulacijskih krugova (1)

Modificirana TKE primijenjena je i na rješavanje problema energetske elektronike. Rezultati su uspoređeni s rezultatima dobivenim pomoću Simulinka.

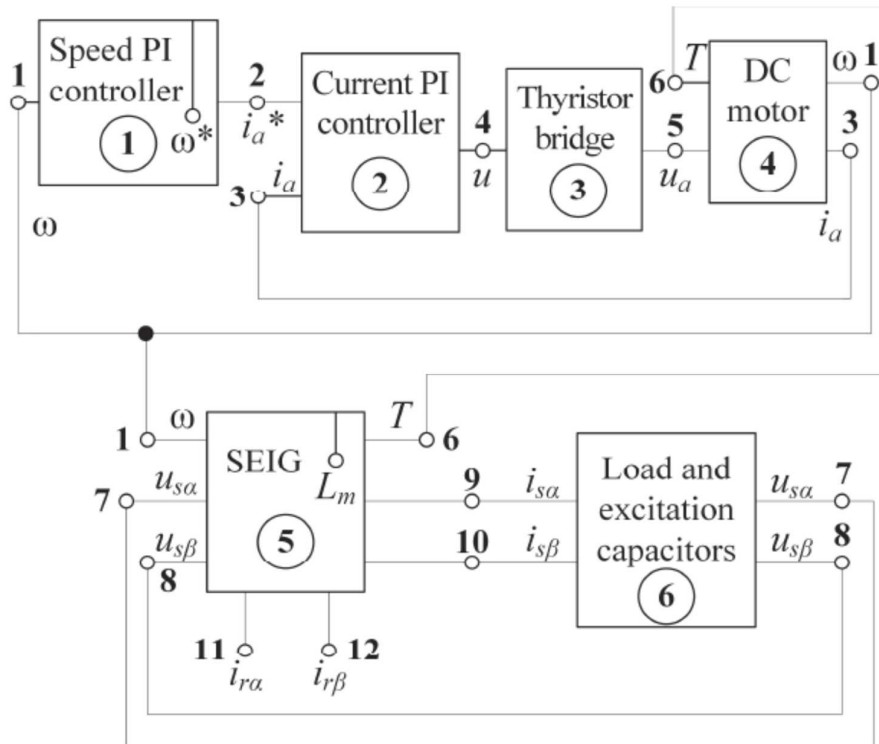
Vujević, S.; Polić, M.; Bašić, M.; Vukadinović, D. **FET-Based Numerical Modeling of a Self-Excited Induction Generator Driven by a Controlled DC Motor.** *International Review of Modelling and Simulations (IREMOS)*. 9 (2016), 5; 329-338



112



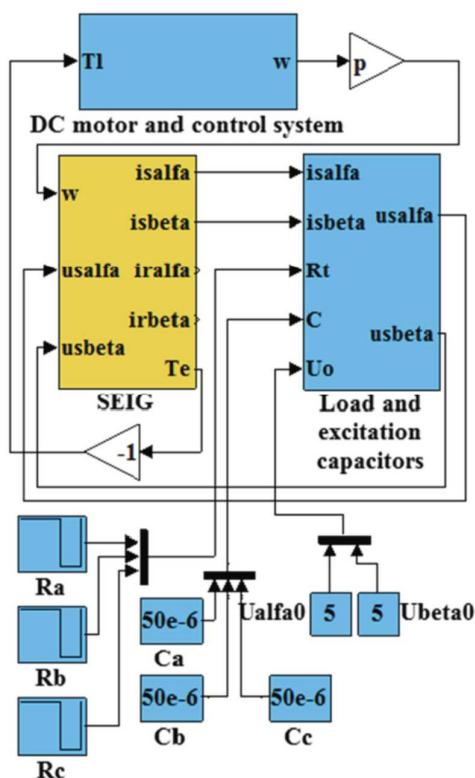
## TKE – Analiza regulacijskih krugova (2)



TKE

113

## TKE – Analiza regulacijskih krugova (3)



MATLAB Simulink

114

## MJ u diferencijalnom obliku za pokretno sredstvo (1)

Maxwellove jednadžbe (MJ) u diferencijalnom obliku za pokretno sredstvo glase:

$$\text{rot } \vec{H} = \nabla \times \vec{H} = \kappa \cdot \vec{E} + \vec{J} + \frac{d\vec{D}}{dt}$$

$$\text{rot } \vec{E} = \nabla \times \vec{E} = - \frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\text{div } \vec{D} = \nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\text{div } \vec{B} = \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Veličine  $\vec{J}$  i  $\rho$   
predstavljaju  
**nezavisne izvore**  
elektromagnetskog  
polja.

gdje  $\vec{J}$  označava gustoću struje uslijed gibanja naboja (provodne i/ili konvekcijske struje). Veličina  $\rho$  je volumna gustoća slobodnih naboja.

115

## MJ u diferencijalnom obliku za pokretno sredstvo (2)

Lako se može pokazati da je:

$$\text{rot } (\vec{H} + \vec{v} \times \vec{D}) = \nabla \times (\vec{H} + \vec{v} \times \vec{D}) = \kappa \cdot \vec{E} + \vec{J} + \rho \cdot \vec{v} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\text{rot } (\vec{E} - \vec{v} \times \vec{B}) = \nabla \times (\vec{E} - \vec{v} \times \vec{B}) = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{div } \vec{D} = \nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\text{div } \vec{B} = \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

gdje je  $\vec{v}$  relativna brzina sredstva u odnosu na mirnog promatrača.

116

## MJ u integralnom obliku za pokretno sredstvo (1)

Maxwellove jednadžbe u integralnom obliku za pokretno sredstvo glase:

$$\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \left( \kappa \cdot \vec{E} + \vec{J} + \frac{d\vec{D}}{dt} \right) \cdot d\vec{S} = I_{ob} + \int_S \frac{d\vec{D}}{dt} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_K \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho \cdot dV = Q_{ob}$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

gdje  $I_{ob}$  označava konturom  $K$  obuhvaćenu struju uslijed gibanja naboja (provodnu i/ili konvekcijsku struju). Veličina  $Q_{ob}$  jest količina slobodnog naboja obuhvaćenog zatvorenim plohom  $S$ .

117

## MJ u integralnom obliku za pokretno sredstvo (2)

Lako se može pokazati da je:

$$\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \left( \kappa \cdot \vec{E} + \vec{J} + \rho \cdot \vec{v} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} - \oint_K (\vec{v} \times \vec{D}) \cdot d\vec{l}$$

$$\oint_K \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} + \oint_K (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho \cdot dV = Q_{ob}$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

118

## MJ u diferencijalnom obliku za mirujuće sredstvo

Maxwellove jednačbe u diferencijalnom obliku za mirujuće sredstvo (u mirujućem koordinatnom sustavu) glase:

$$\text{rot } \vec{H} = \nabla \times \vec{H} = \kappa \cdot \vec{E} + \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \vec{E} = \nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{div } \vec{D} = \nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\text{div } \vec{B} = \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

gdje je u odnosu na pokretno sredstvo puna derivacija po vremenu, u prve dvije jednačbe, zamijenjena parcijalnom derivacijom po vremenu.

119

## MJ u integralnom obliku za mirujuće sredstvo

Maxwellove jednačbe u integralnom obliku za mirujuće sredstvo glase:

$$\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \left( \kappa \cdot \vec{E} + \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} = I_{ob} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_K \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho \cdot dV = Q_{ob}$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

120

## MJ u diferencijalnom obliku za sinusne veličine (1)

MJ u diferencijalnom obliku za sinusno EM polje u **pokretnom** sredstvu glase:

$$\text{rot}(\vec{\underline{H}} + \vec{v} \times \vec{\underline{D}}) = \nabla \times (\vec{\underline{H}} + \vec{v} \times \vec{\underline{D}}) = \kappa \cdot \vec{\underline{E}} + \vec{\underline{J}} + \bar{\rho} \cdot \vec{v} + j \cdot \omega \cdot \vec{\underline{D}}$$

$$\text{rot}(\vec{\underline{E}} - \vec{v} \times \vec{\underline{B}}) = \nabla \times (\vec{\underline{E}} - \vec{v} \times \vec{\underline{B}}) = -j \cdot \omega \cdot \vec{\underline{B}}$$

$$\text{div} \vec{\underline{D}} = \nabla \cdot \vec{\underline{D}} = \bar{\rho}$$

$$\text{div} \vec{\underline{B}} = \nabla \cdot \vec{\underline{B}} = 0$$

## MJ u diferencijalnom obliku za sinusne veličine (2)

MJ u diferencijalnom obliku za sinusno EM polje u **mirujućem** sredstvu glase:

$$\text{rot} \vec{\underline{H}} = \nabla \times \vec{\underline{H}} = \kappa \cdot \vec{\underline{E}} + \vec{\underline{J}} + j \cdot \omega \cdot \vec{\underline{D}}$$

$$\text{rot} \vec{\underline{E}} = \nabla \times \vec{\underline{E}} = -j \cdot \omega \cdot \vec{\underline{B}}$$

$$\text{div} \vec{\underline{D}} = \nabla \cdot \vec{\underline{D}} = \bar{\rho}$$

$$\text{div} \vec{\underline{B}} = \nabla \cdot \vec{\underline{B}} = 0$$

## Elektromagnetski potencijali (1)

Za prikaz elektromagnetskog polja koriste se i pomoćne funkcije poznate pod imenom elektromagnetski potencijali.

Moguće je definirati više različitih parova potencijala, uz različitu vezu između njih (baždarske uvjete).

Najčešće se koristi vektorski magnetski potencijal  $\vec{A}$  i skalarni električni potencijal  $\varphi$  koji su, sukladno Maxwellovim jednadžbama, u mirujućem sredstvu definirani jednadžbama:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

123

## Elektromagnetski potencijali (2)

Iz Maxwellovih jednadžbi u mirujućem sredstvu, uz korištenje Lorentzovog uvjeta, lako se dobije sustav nehomogenih prigušenih valnih jednadžbi:

$$\Delta \vec{A} - \mu \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \mu \cdot \kappa \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\mu \cdot \vec{J}$$

$$\Delta \varphi - \mu \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \mu \cdot \kappa \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

gdje su  $\vec{J}$  i  $\rho$  gustoće nezavisnih izvora EM polja. Ovo je potpuni sustav jednadžbi ako su zadani nezavisni izvori.

124

## Formulacije elektromagnetskih problema

**Diferencijalna formulacija problema** – matematički ili inženjerski problem opisan je pomoću diferencijalnih jednažbi, tj. jednažbi koje sadrže derivacije. Diferencijalna jednažba vrijedi za jednu točku.

**Integralna formulacija problema** – matematički ili inženjerski problem opisan je pomoću integralnih jednažbi, tj. jednažbi koje sadrže integrale.

**Integro-diferencijalna formulacija problema** – matematički ili inženjerski problem opisan je pomoću integro-diferencijalnih jednažbi, tj. jednažbi koje sadrže i integrale i derivacije.

125

## Približno rješavanje diferencijalnih jednažbi

Diferencijalne jednažbe se mogu približno rješavati polazeći od osnovne leme varijacijskog računa. Pritom se može koristiti:

- **Jaka** formulacija (engl. *strong formulation*)
- **Blaga** formulacija (engl. *weak formulation*)

Jaka formulacija zahtijeva viši stupanj nenulte derivacije baznih funkcija aproksimacije, tj. zahtjevi po pitanju derivabilnosti su jaki.

Blaga formulacija zahtijeva niži stupanj nenulte derivacije baznih funkcija aproksimacije, tj. zahtjevi po pitanju derivabilnosti su blagi.

126

## Približno rješavanje DJ – jaka formulacija (1)

Neka je problem opisan diferencijalnom jednačinom:

$$L(u) = f$$

gdje je:  $L$  – diferencijalni operator,

$f$  – poznata funkcija.

Rješenje diferencijalne jednačine je funkcija  $u$  koja se može aproksimirati linearnom kombinacijom baznih funkcija:

$$\tilde{u} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot \varphi_j$$

127

## Približno rješavanje DJ – jaka formulacija (2)

Približno rješenje za slijedi iz osnovne leme varijacijskog računa.

$$\int_{\Omega} [L(\tilde{u}) - f] \cdot h_i \cdot d\Omega = 0 \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} L \left( \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot \varphi_j \right) \cdot h_i \cdot d\Omega = \int_{\Omega} f \cdot h_i \cdot d\Omega \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

128



## Približno rješavanje DJ – jaka formulacija (3)

Za linearni operator  $L$  vrijedi da je:

$$\int_{\Omega} \left( \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot L(\varphi_j) \right) \cdot h_i \cdot d\Omega = \int_{\Omega} f \cdot h_i \cdot d\Omega \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Lako se vidi da vrijedi da je:

$$\sum_{j=1}^n \left( \int_{\Omega} h_i \cdot L(\varphi_j) \cdot d\Omega \right) \cdot \alpha_j = \int_{\Omega} f \cdot h_i \cdot d\Omega \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

129

## Približno rješavanje DJ – jaka formulacija (4)

Dakle, za linearni operator  $L$ , nepoznati koeficijenti se računaju iz sustava linearnih jednačini:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot \alpha_j = b_i \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

gdje je:

$$a_{ij} = \int_{\Omega} h_i \cdot L(\varphi_j) \cdot d\Omega$$

$$b_i = \int_{\Omega} f \cdot h_i \cdot d\Omega$$

130

## Približno rješavanje DJ – jaka formulacija (5)

U općem slučaju, problem je u potpunosti opisan ako su uz navedenu diferencijalnu jednadžbu zadani:

- rubni uvjeti,
- početni uvjeti.

Bazne funkcije aproksimacije moraju imati potrebni stupanj nenulte derivacije.

Za nelinearni operator  $L$  vrijedi da je:

$$F_i = \int_{\Omega} L \left( \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot \varphi_j \right) \cdot h_i \cdot d\Omega - \int_{\Omega} f \cdot h_i \cdot d\Omega \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Slijedi iterativni postupak, npr. Newton-Raphsonova metoda.

131

## Približno rješavanje DJ – jaka formulacija (6)

Klasifikacija metoda s obzirom na izbor težinskih funkcija:

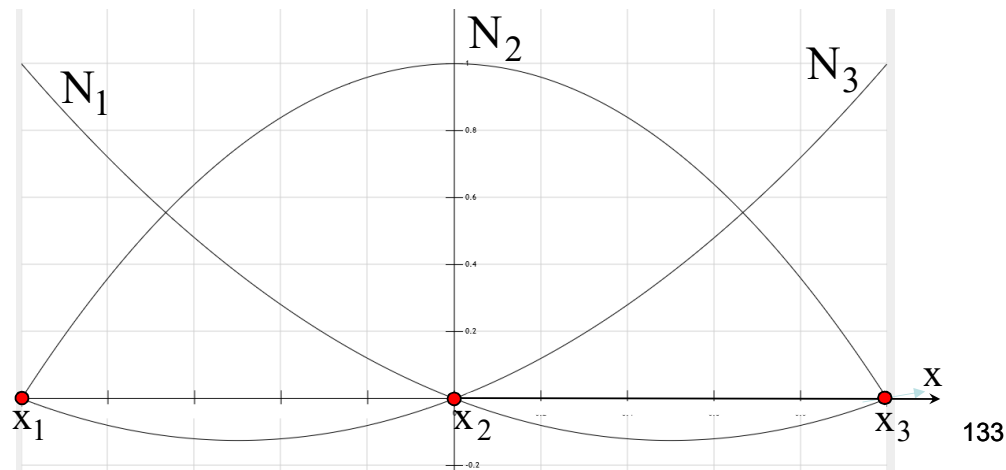
- Metoda momenata:  $h_i \in \{ 1, x, x^2, \dots \}$
- Metoda kolokacije u točki:  $h_i = \delta(x - x_i)$
- Metoda najmanjih kvadrata:  $h_i = L(\varphi_i)$
- Galjerkin-Bubnovljeva metoda:  $h_i = \varphi_i$
- Metoda kolokacije u području:  $h_i = 1$  na dijelu područja
- Metoda najmanjih kvadrata s kolokacijskim točkama – uzme se više kolokacijskih točaka no što je nepoznanica pa se sustav riješi po metodi najmanjih kvadrata

132

## Približno rješavanje DJ – jaka formulacija (7)

Kako naći približno rješenje 1D diferencijalne jednačbe **drugog reda** metodom konačnih elemenata, uz jaku formulaciju problema?

Druga derivacija oblikovnih funkcija treba biti različita od nule. To znači da 1D konačni element kojem su oblikovne funkcije Lagrangeovi polinomi mora imati najmanje tri čvora.



## Približno rješavanje DJ – jaka formulacija (8)

Ako se, uz MKE, koristi Galjerkin-Bubnova metoda, onda je:

$$K_{ij} = \int_{\Omega_e} N_i \cdot L(N_j) \cdot dx$$

$$D_i = \int_{\Omega_e} f \cdot N_i \cdot dx$$

Ako se, uz MKE, koristi metoda najmanjih kvadrata, onda je:

$$K_{ij} = \int_{\Omega_e} L(N_i) \cdot L(N_j) \cdot dx$$

$$D_i = \int_{\Omega_e} f \cdot L(N_i) \cdot dx$$

## Približno rješavanje DJ – jaka formulacija (9)

Kod jake formulacije, simetrični sustav jednažbi daje metoda najmanjih kvadrata. Nameće se zaključak da je, u ovom slučaju, upravo nju najlogičnije koristiti, bez obzira koristi li se MKE.

MKE algoritam ima sljedeće korake:

- Formiranje lokalnih sustava jednažbi
- Asembliranje, odnosno formiranje globalnog sustava jednažbi
- Zadavanje rubnih uvjeta
- Rješavanje globalnog sustava jednažbi

135

## Blaga formulacija + MKE

Blaga formulacija je prilagođena zahtjevima MKE. Cilj je da se mogu koristiti konačni elementi sa što manjim brojem lokalnih čvorova. No to nije jedini razlog. Kod rješavanja inženjerskih problema, blaga formulacija i Galjerkin-Bubnovljeva metoda daju isti sustav jednažbi kao i minimizacija funkcionala energije. To znači da je takav sustav jednažbi fizikalno utemeljen. Naravno, tada se o radi o simetričnom sustavu jednažbi.

Dakle, najjednostavnije je diferencijalne jednažbe rješavati uz primjenu:

- Blage formulacije
- MKE
- Galjerkin-Bubnovljeve metode

U nastavku će se koristiti upravo takva kombinacija.

136

## MKE – Poissonova diferencijalna jednačba (1)

Neka je elektrostatički problem opisan Poissonovom diferencijalnom jednačbom:

$$\nabla(\varepsilon \cdot \nabla\varphi) = -\rho$$

gdje je Hamiltonov operator:  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \vec{k}$

$\varphi$  - elektrostatički potencijal,

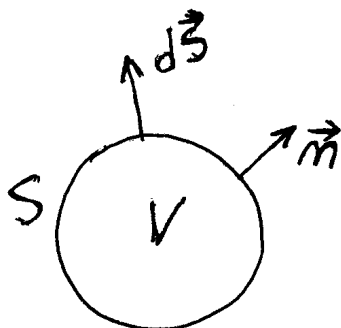
$\varepsilon$  - značajka sredstva (dielektričnost sredstva) – u općem slučaju tenzor,

$\rho$  - prostorna gustoća naboja.

137

## MKE – Poissonova diferencijalna jednačba (2)

Neka je Poissonova diferencijalna jednačba zadana na volumenu  $V$ , kojeg zatvara ploha  $S$ .



$$\nabla(\varepsilon \cdot \nabla\varphi) = -\rho$$

Prvi korak je primjena osnovne leme varijacijskog računa, odnosno metode težinskih odstupanja.

138

## MKE – Poissonova diferencijalna jednačba (3)

Vrijedi da je:

$$\int_V [\nabla(\varepsilon \cdot \nabla\varphi) + \rho] \cdot \mathbf{h} \cdot dV = 0 \quad ; \quad \forall \mathbf{h} : V \rightarrow \mathbb{R}$$

Slijedi da je:

$$\int_V \nabla(\varepsilon \cdot \nabla\varphi) \cdot \mathbf{h} \cdot dV = - \int_V \mathbf{h} \cdot \rho \cdot dV \quad ; \quad \forall \mathbf{h} : V \rightarrow \mathbb{R}$$

139

## MKE – Poissonova diferencijalna jednačba (4)

Nakon provedene parcijalne integracije dobije se jednačba:

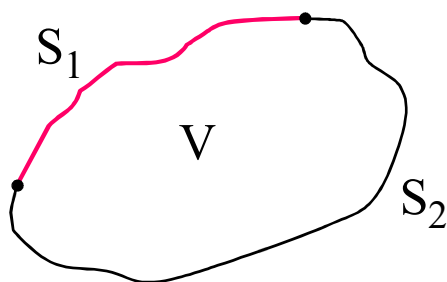
$$\int_V \varepsilon \cdot \nabla \mathbf{h} \cdot \nabla \varphi \cdot dV = \int_V \mathbf{h} \cdot \rho \cdot dV + \underbrace{\oint_S \mathbf{h} \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \cdot dS}_{\text{rubni uvjeti}} \quad ; \quad \forall \mathbf{h}$$

koja predstavlja blagu formulaciju problema i to je polazni izraz za MKE.

$$\nabla \varphi \cdot \vec{\mathbf{n}} = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \quad - \quad \text{usmjerena derivacija u smjeru vanjske normale}$$

140

## MKE – Poissonova diferencijalna jednačina (5)



$$S = S_1 \cup S_2$$

Trebaju biti zadani i rubni uvjeti. Neka je zadano:

- Na  $S_1$  zadano  $\varphi$  - Dirichletov rubni uvjet
- Na  $S_2$  zadano  $q = \varepsilon \cdot \nabla \varphi \cdot \vec{n} = \varepsilon \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n}$   
( $q$  - gustoća toka koji ulazi u volumen) - Neumannov rubni uvjet

141

## MKE – Poissonova diferencijalna jednačina (6)

U stvarnosti uvijek se rješava 3D problem. 1D i 2D problemi su reducirani 3D problemi:

$$3D \rightarrow 2D \Rightarrow$$

$$dV \rightarrow 1 \cdot dS = dS \quad ; \quad dS \rightarrow 1 \cdot ds = ds$$

$$3D \rightarrow 1D \Rightarrow$$

$$dV \rightarrow 1 \cdot ds \rightarrow dx \quad ; \quad S \rightarrow \text{rubne točke}$$

142

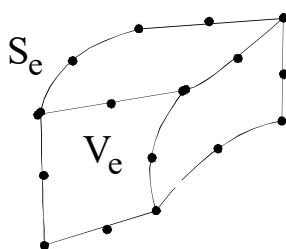
## MKE – Poissonova diferencijalna jednačina (7)

MKE se zasniva na blagoj formulaciji i Galjerkin-Bubnovljevoj metodi.

Neka aproksimacija funkcije  $\Phi$  po konačnom elementu glasi:

$$\Phi = \sum_{j=1}^{\text{NCE}} N_j \cdot \Phi_j$$

pa je za Galjerkin-Bubnovljevu metodu:  $h \rightarrow N_i$ .



Neka je  $V_e$  volumen konačnog elementa.

Neka je  $S_e$  vanjska ploha konačnog elementa.

143

## MKE – Poissonova diferencijalna jednačina (8)

Za konačni element vrijedi da je:

$$\int_{V_e} \epsilon_e \cdot \nabla N_i \cdot \nabla \Phi \cdot dV = \int_{V_e} N_i \cdot \rho \cdot dV + \oint_{S_e} N_i \cdot q \cdot dS \quad ; \quad \forall N_i$$

Nakon uvrštenja linearne kombinacije oblikovnih funkcija, ima se:

$$\sum_{j=1}^{\text{NCE}} \left( \int_{V_e} \epsilon_e \cdot \nabla N_i \cdot \nabla N_j \cdot dV \right) \cdot \Phi_j = \int_{V_e} N_i \cdot \rho \cdot dV + \oint_{S_e} N_i \cdot q \cdot dS \quad \forall N_i$$

144



## MKE – Poissonova diferencijalna jednačba (9)

Lako se vidi da potpuni lokalni sustav jednačbi glasi:

$$\sum_{j=1}^{NCE} K_{ij} \cdot \Phi_j = D_i + Q_i \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, NCE$$

$$K_{ij} = \int_{V_e} \epsilon_e \cdot \nabla N_i \cdot \nabla N_j \cdot dV$$

$$D_i = \int_{V_e} N_i \cdot \rho \cdot dV \quad ; \quad Q_i = \oint_{S_e} N_i \cdot q \cdot dS$$

145

## MKE – Poissonova diferencijalna jednačba (10)

Potpuni lokalni sustav jednačbi u matričnom zapisu glasi:

$$[K] \cdot \{\Phi\} = \{D\} + \{Q\}$$

$Q_i$  – (ukupni) tok pridijeljen  $i$ -tom lokalnom čvoru; pozitivan je tok koji ulazi u konačni element.

U globalnom sustavu se poništavaju tzv. unutarnji tokovi. U globalnom sustavu se pojavljuju samo tokovi pridijeljeni globalnim čvorovima koji pripadaju plohi  $S_2$  na kojoj je zadana gustoća narinutog toka. Iz navedenog je lako zaključiti kako glasi nepotpuni lokalni sustav jednačbi.

146

## MKE – Poissonova diferencijalna jednačba (11)

Nepotpuni lokalni sustav jednačbi u matričnom zapisu glasi:

$$[\mathbf{K}] \cdot \{\Phi\} = \{D\} + \{Q_{\text{nar}}\}$$

$$K_{ij} = \int_{V_e} \epsilon_e \cdot \nabla N_i \cdot \nabla N_j \cdot dV \quad ; \quad D_i = \int_{V_e} N_i \cdot \rho \cdot dV$$

$$Q_{\text{nar } i} = \int_{S_{2e}} N_i \cdot q \cdot dS \quad - \text{ narinuti tok pridijeljen } i\text{-tom lokalnom čvoru.}$$

$S_{2e}$  – dio vanjske plohe  $S_2$  koji pripada razmatranom konačnom elementu.

147

## MKE – Poissonova diferencijalna jednačba (12)

Asembliranjem nepotpunih lokalnih sustava jednačbi, dobije se nepotpuni globalni sustav jednačbi koji u matričnom zapisu glasi:

$$[\mathbf{A}] \cdot \{\Phi_g\} = \{P\} + \{Q_{g \text{ nar}}\}$$

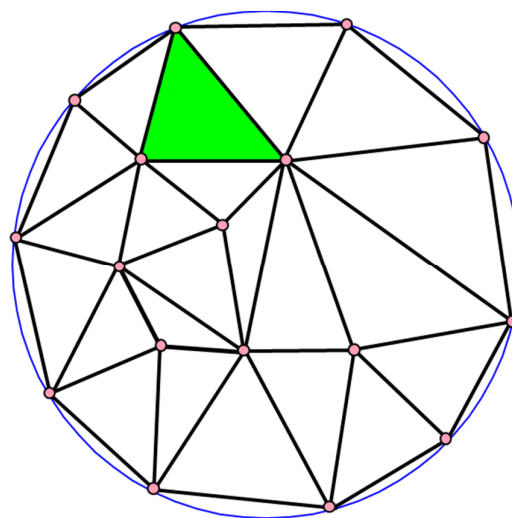
$\{Q_{g \text{ nar}}\}$  – vektor narinutog globalnog toka; komponente vektora su tokovi pridijeljeni globalnim čvorovima na plohi  $S_2$

Globalni sustav jednačbi se upotpunjuje zadavanjem Dirichletovih rubnih uvjeta, odnosno zadavanjem potencijala u globalnim čvorovima koji pripadaju plohi  $S_1$ . Potencijal mora biti propisan u bar jednom globalnom čvoru. U protivnom je globalni sustav jednačbi neodređen, tj. ima beskonačno mnogo rješenja.

148

## 2D trokutni konačni elementi (1)

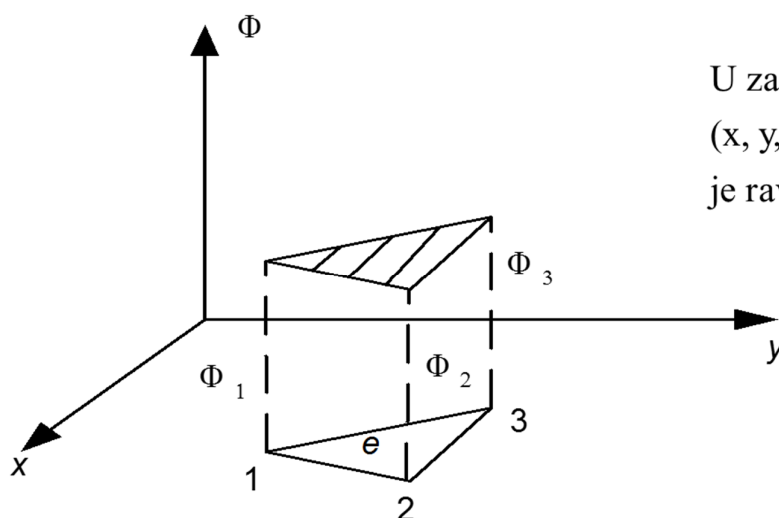
Neka se 2D područje proračuna dijeli na trokutne tročvorne konačne elemente.



149

## 2D trokutni konačni elementi (2)

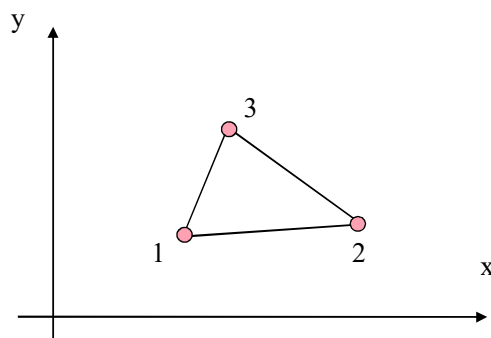
Tročvorni trokutni konačni element omogućuje linearnu aproksimaciju funkcije potencijala po konačnom elementu.



U zamišljenom 3D sustavu  $(x, y, \Phi)$  s tri točke definirana je ravnina.

150

## 2D trokutni konačni elementi (3)



Izdvojeni konačni element

Raspodjela potencijala po konačnom elementu opisana je izrazom:

$$\Phi = \sum_{j=1}^3 N_j(x, y) \cdot \Phi_j$$

Za tročvorni trokutni 2D konačni element mogu se definirati oblikovne funkcije i bez izoparametrijskog preslikavanja.

151

## 2D trokutni konačni elementi (4)

$$N_j = \frac{1}{2 \cdot A} \cdot [c_j + b_j \cdot x + a_j \cdot y] \quad A = \pm \text{Površina trokuta}$$

j	$a_j$	$b_j$	$c_j$
1	$a_1 = x_3 - x_2$	$b_1 = y_2 - y_3$	$c_1 = x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2$
2	$a_2 = x_1 - x_3$	$b_2 = y_3 - y_1$	$c_2 = x_3 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_3$
3	$a_3 = x_2 - x_1$	$b_3 = y_1 - y_2$	$c_3 = x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1$

152

## 2D trokutni konačni elementi (5)

Ako je sredstvo unutar konačnog elementa homogeno i izotropno, onda je za Poissonovu ili Laplaceovu diferencijalnu jednadžbu  $\epsilon_e$  konstanta pa matrica tročvornog 2D konačnog elementa glasi:

$$[\mathbf{K}] = \epsilon_e \cdot \int_{S_e} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_1}{\partial y} \\ \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} \\ \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot dS$$

153

## 2D trokutni konačni elementi (6)

Slijedi da je:

$$[\mathbf{K}] = \epsilon_e \cdot \int_{S_e} [\mathbf{B}]^T \cdot [\mathbf{B}] \cdot dS = \epsilon_e \cdot [\mathbf{B}]^T \cdot [\mathbf{B}] \cdot |A|$$

pa je konačni izraz za matricu tročvornog 2D konačnog elementa:

$$[\mathbf{K}] = \frac{\epsilon_e}{4 \cdot |A|} \cdot \begin{bmatrix} a_1^2 + b_1^2 & a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 & a_1 \cdot a_3 + b_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 & a_2^2 + b_2^2 & a_2 \cdot a_3 + b_2 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot a_3 + b_1 \cdot b_3 & a_2 \cdot a_3 + b_2 \cdot b_3 & a_3^2 + b_3^2 \end{bmatrix}$$

154

## 2D trokutni konačni elementi (7)

Ako je sredstvo unutar konačnog elementa homogeno i izotropno, onda za 2D probleme opisane Poissonovom ili Laplaceovom diferencijalnom jednačbom vrijedi sljedeći izraz za matricu pripadnog konačnog elementa:

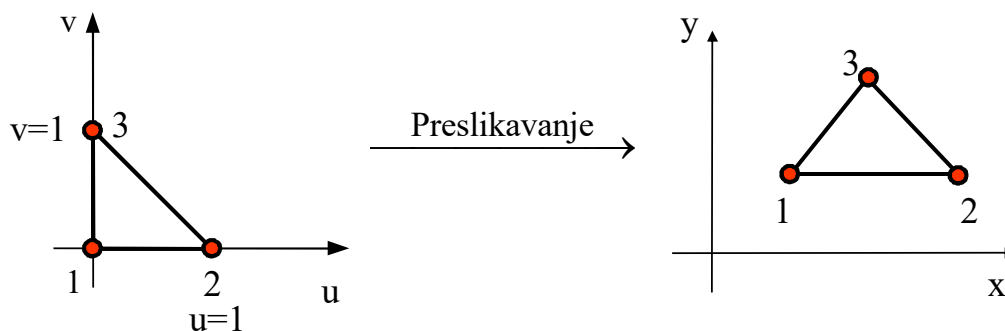
$$[\mathbf{K}] = \varepsilon_e \cdot \int_{S_e} [\mathbf{B}]^T \cdot [\mathbf{B}] \cdot dS$$

što je poseban slučaj izraza koji vrijedi ako je sredstvo unutar konačnog elementa anizotropno (ima različita svojstva u različitim smjerovima):

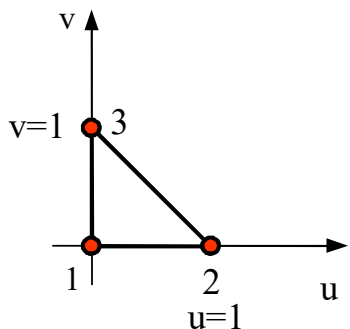
$$[\mathbf{K}] = \int_{S_e} [\mathbf{B}]^T \cdot [\varepsilon_e] \cdot [\mathbf{B}] \cdot dS$$

## 2D trokutni izoparametrijski konačni elementi (1)

Trokutni **tročvorni** konačni element se može dobiti i izoparametrijskim preslikavanjem, a to je kompliciranije rješenje od nepreslikanog elementa. To ima smisla kada se nešto mora integrirati po konačnom elementu jer se onda integrira numerički po Gaussu.



## 2D trokutni izoparametrijski konačni elementi (2)



$$\Phi = \sum_{j=1}^3 N_j \cdot \Phi_j$$

$$x = \sum_{j=1}^3 N_j \cdot x_j \quad ; \quad y = \sum_{j=1}^3 N_j \cdot y_j$$

Oblikovne funkcije glase:  $N_1 = 1 - u - v$

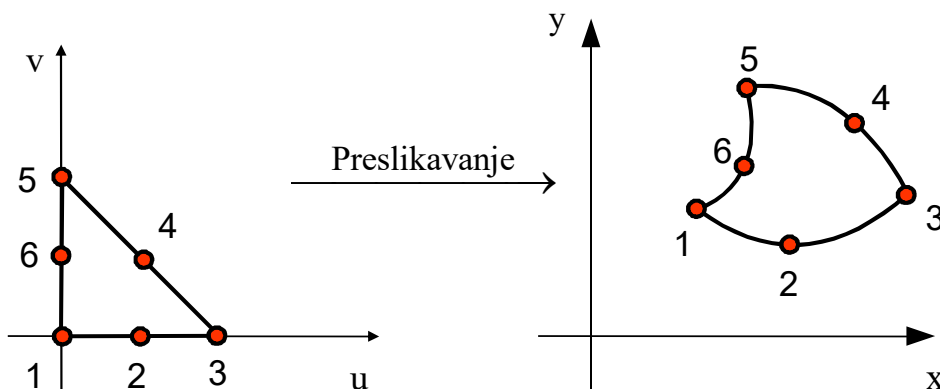
$$N_2 = u$$

$$N_3 = v$$

157

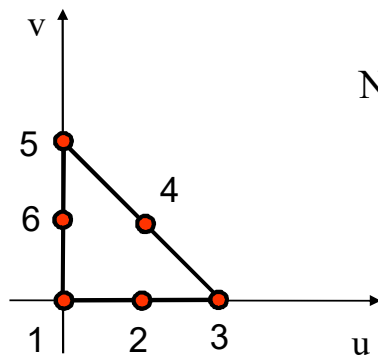
## 2D trokutni izoparametrijski konačni elementi (3)

Ako želimo da bridovi konačnog elementa mogu biti krivocrtni, onda se mogu koristiti šesteročvorni izoparametrijski konačni elementi.



158

## 2D trokutni izoparametrijski konačni elementi (4)



$$N_1 = 1 - 3 \cdot u - 2 \cdot v + 2 \cdot u^2 + 2 \cdot v^2 + 4 \cdot u \cdot v$$

$$N_2 = 4 \cdot u - 4 \cdot u^2 - 4 \cdot u \cdot v$$

$$N_3 = -u + 2 \cdot u^2$$

$$N_4 = 4 \cdot u \cdot v$$

$$N_5 = -v + 2 \cdot v^2$$

$$N_6 = 4 \cdot v - 4 \cdot v^2 - 4 \cdot u \cdot v$$

Praktičnije je koristiti  
2D četverostranične  
konačne elemente no  
šesteročvorne  
trokutne.

159

## 2D četverostranični izoparametr. konačni elementi (1)

Mnogo je lakše (automatski) generirati mrežu konačnih elemenata pomoću četverostraničnih (kvadrilateralnih) 2D konačnih elemenata.

2D četverostranični konačni elementi su u pravilu izoparametrijski.

Mi ćemo razmatrati samo konačne elemente kojima su oblikovne funkcije i funkcije preslikavanja Lagrangeovi polinomi ili pak njihove izvedenice.

Najmanji mogući broj čvorova četverostraničnog konačnog elementa je 4.

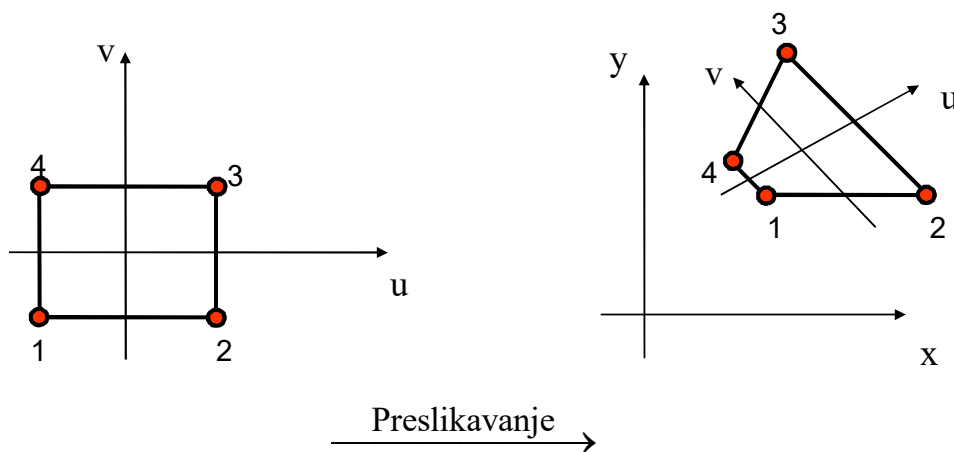
Jedinični 2D konačni elementi se u posebnom slučaju mogu preslikati i u trokutne konačne elemente, što se ostvaruje načinom zadavanja matrice veze između oznaka lokalnih i globalnih čvorova pojedinog konačnog elementa.

160



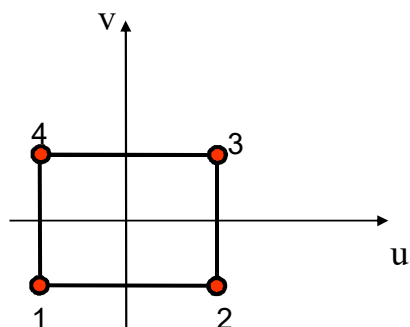
## 2D četverostranični izoparametr. konačni elementi (2)

Četveročvorni četverostranični 2D konačni element



161

## 2D četverostranični izoparametr. konačni elementi (3)



Može se napisati i opća formula za sve četiri oblikovne funkcije:

$$N_j = \frac{1}{4} \cdot (1 + u \cdot u_j) \cdot (1 + v \cdot v_j)$$

$(u_j, v_j)$  – lokalne koordinate j-tog čvora

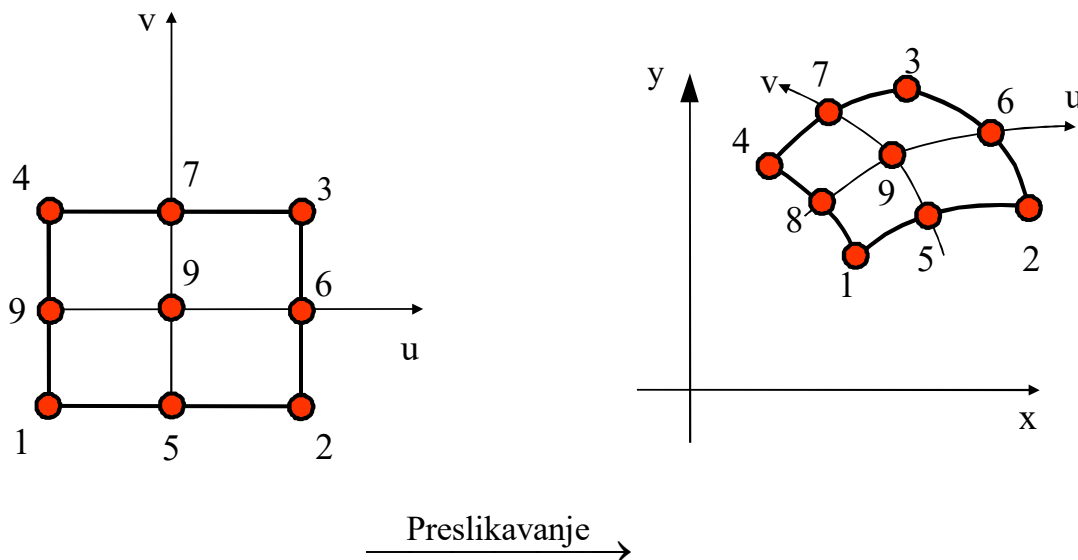
$$(u_1, v_1) = (-1, -1) \quad ; \quad (u_2, v_2) = (1, -1)$$

$$(u_3, v_3) = (1, 1) \quad ; \quad (u_4, v_4) = (-1, 1)$$

162

## 2D četverostranični izoparametr. konačni elementi (4)

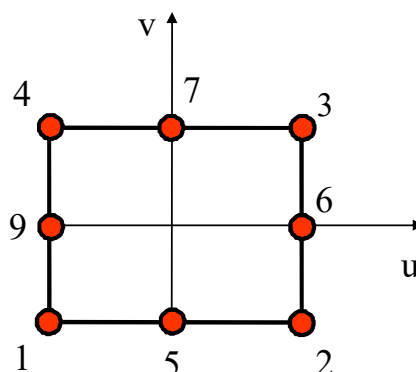
Devetočvorni četverostranični 2D konačni element



163

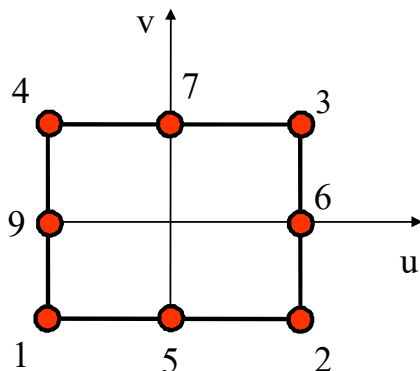
## 2D četverostranični izoparametr. konačni elementi (5)

U praksi se najčešće koristi osmočvorni četverostranični 2D konačni element. Njegove oblikovne funkcije su tzv. serendipity polinomi koji se dobiju preinakom Lagrangeovih 2D polinoma tako što suma svih oblikovnih funkcija mora biti jednaka 1.



164

## 2D četverostranični izoparametr. konačni elementi (6)



$$N_j = \frac{1}{2} \cdot v \cdot (v + v_j) \cdot (1 - u^2) \quad ; \quad j = 5, 7$$

$$N_j = \frac{1}{2} \cdot u \cdot (u + u_j) \cdot (1 - v^2) \quad ; \quad j = 6, 8$$

$$N_j = \frac{1}{4} \cdot (1 + u \cdot u_j) \cdot (1 + v \cdot v_j) \cdot (u \cdot u_j + v \cdot v_j - 1) \quad ; \quad j = 1, 2, 3, 4$$

165

## Matrica izoparametrijskih konačnih elemenata (1)

Za homogenu i izotropno sredstvo unutar pojedinog konačnog elementa, za 2D probleme opisane Poissonovom ili Laplaceovom diferencijalnom jednačinom vrijedi slijedeći izraz za matricu konačnog elementa:

$$[K] = \varepsilon_e \cdot \int_{S_e} [B]^T \cdot [B] \cdot dS \quad ; \quad dS = dx \cdot dy$$

Nepraktične trokutne 2D izoparametrijske elemente nećemo razmatrati.

Za izoparametrijske četverostranične konačne elemente, integracija se provodi numerički na jediničnom 2D konačnom elementu:

$$[K] = \varepsilon_e \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T \cdot [B] \cdot |J| \cdot du \cdot dv$$

166

## Matrica izoparametrijskih konačnih elemenata (2)

Izvodom se može lako dokazati da je:

$$[B] = [J]^{-1} \cdot [D]$$

gdje je  $[D]$  matrica derivacija oblikovnih funkcija po lokalnim koordinatama:

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial u} & \dots & \frac{\partial N_{NCE}}{\partial u} \\ \frac{\partial N_1}{\partial v} & \dots & \frac{\partial N_{NCE}}{\partial v} \end{bmatrix}$$

Analitički izrazi za koeficijente matrice  $[D]$  upisuju se u računalni program.

NCE – ukupan broj lokalnih čvorova konačnog elementa.

167

## Matrica izoparametrijskih konačnih elemenata (3)

Matrica  $[J]$  je Jacobijeva matrica koja glasi:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = [D] \cdot \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ \vdots & \vdots \\ x_{NCE} & y_{NCE} \end{bmatrix}$$

dok je Jacobijeva determinanta:  $J = \det [J] = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$

168

## Matrica izoparametrijskih konačnih elemenata (4)

Vrijedi da je:

$$dS = dx \cdot dy = |J| \cdot du \cdot dv$$

gdje je:

$$|J| = | \det [J] |$$

apsolutni iznos Jacobijeve determinante.

## Matrica superparametrijskih konačnih elemenata (1)

Za matricu superparametrijskog ili subparametrijskog konačnog elementa, jedina je razlika u odnosu na izoparametrijski konačni element što je:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = [\hat{D}] \cdot \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ \vdots & \vdots \\ x_{NFP} & y_{NFP} \end{bmatrix}$$

gdje je:

$$[\hat{D}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{N}_1}{\partial u} & \dots & \frac{\partial \hat{N}_{NFP}}{\partial u} \\ \frac{\partial \hat{N}_1}{\partial v} & \dots & \frac{\partial \hat{N}_{NFP}}{\partial v} \end{bmatrix}$$

## Matrica superparametrijskih konačnih elemenata (2)

Kod superparametrijskog ili subparametrijskog konačnog elementa, funkcije preslikavanja su različite od oblikovnih funkcija:

$$\Phi = \sum_{j=1}^{\text{NCE}} N_j \cdot \Phi_j \quad \text{NCE – ukupan broj oblikovnih funkcija}$$

$$x = \sum_{j=1}^{\text{NFP}} \hat{N}_j \cdot x_j \quad ; \quad y = \sum_{j=1}^{\text{NFP}} \hat{N}_j \cdot y_j$$

$$\text{NFP – ukupan broj funkcija preslikavanja} \quad \hat{N}_j = \hat{N}_j(u, v)$$

171

## 2D Gaussova numerička integracija (1)

Za integraciju po četverostraničnim 2D izoparametrijskim konačnim elementima vrijedi da je:

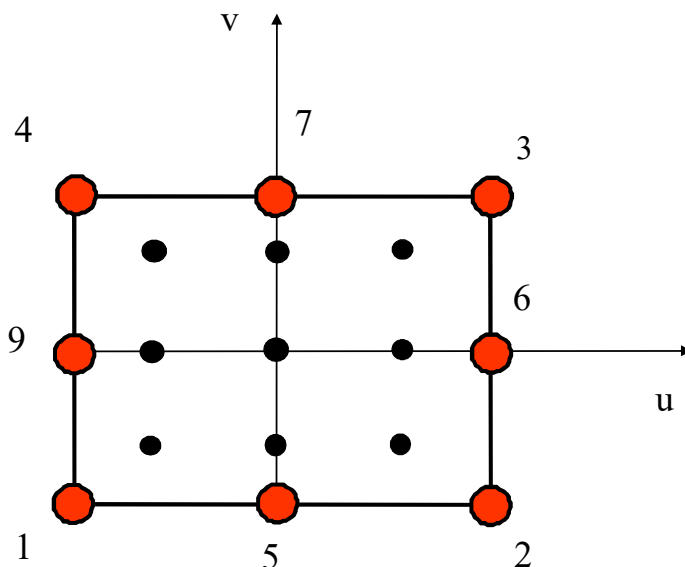
$$I = \int_{S_e} f(x, y) \cdot dx \cdot dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f[x(u, v), y(u, v)] \cdot |J| \cdot du \cdot dv$$

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F(u, v) \cdot du \cdot dv = \sum_{i=1}^{\text{NGU}} \sum_{j=1}^{\text{NGV}} F(u_i, v_j) \cdot HU_i \cdot HV_j$$

172

## 2D Gaussova numerička integracija (2)

2D Gaussova numerička integracija se zasniva na kombinaciji 1D Gaussove numeričke integracije duž osi  $u$  i duž osi  $v$ .



Primjer:

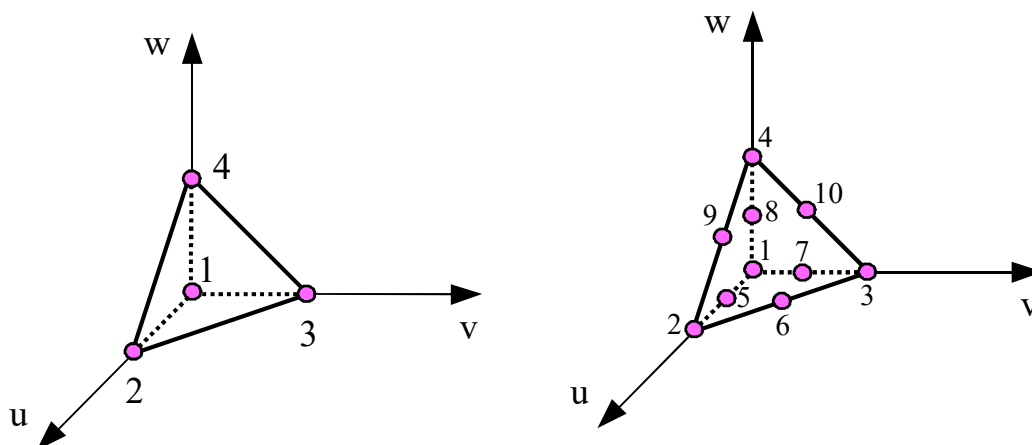
$$3 \times 3 = 9$$

Gaussovih 2D  
integracijskih  
točaka

173

## 3D izoparametrijski konačni elementi (1)

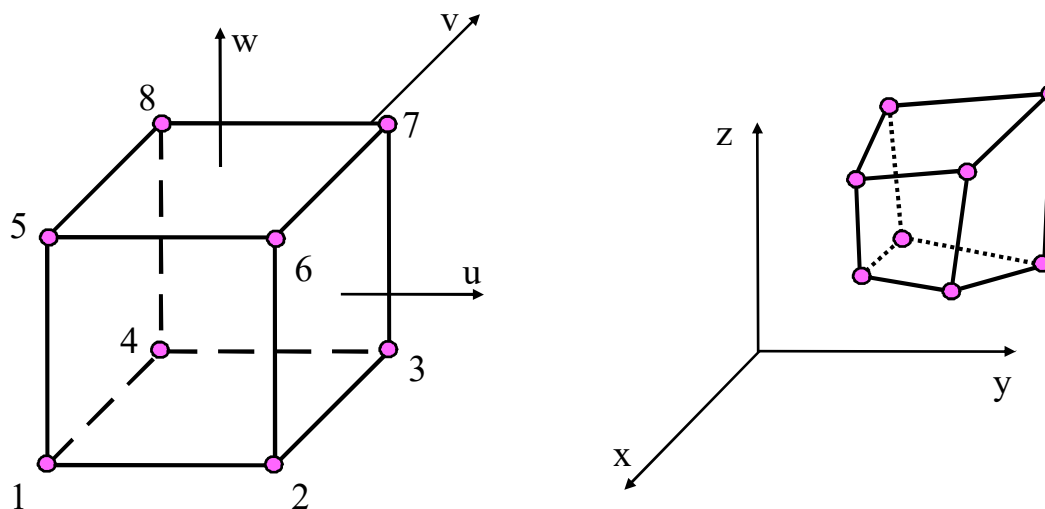
3D područje se može podijeliti na izoparametrijske tetraedre, ali to je nepraktično i nepregledno pa se obično koriste izoparametrijski kuboidi.



Izoparametrijski tetraedri

174

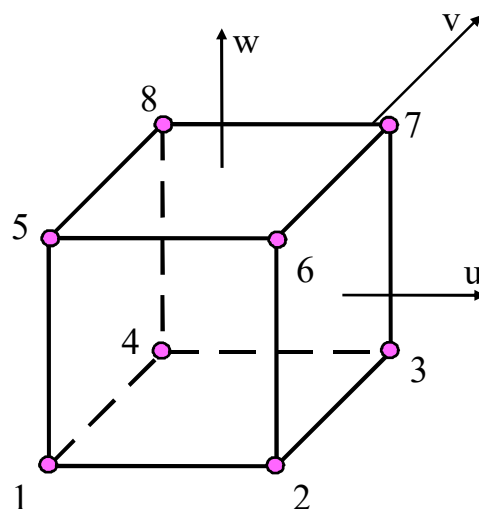
## 3D izoparametrijski konačni elementi (2)



Lagrangeovski osmočvorni kuboid

175

## 3D izoparametrijski konačni elementi (3)

Lagrangeovski  
osmočvorni  
kuboid

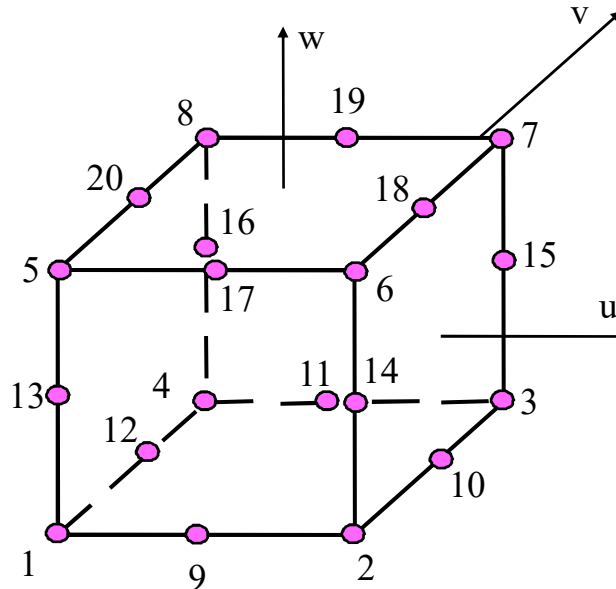
$$N_j = \frac{1}{8} \cdot (1 + u \cdot u_j) \cdot (1 + v \cdot v_j) \cdot (1 + w \cdot w_j)$$

176



### 3D izoparametrijski konačni elementi (4)

Najčešće se koristi 20-čvorni kuboid, koji nastaje tako da se 27-čvornom Lagrangeovskom kuboidu izbací ukupno 7 čvorova.



177

### Matrica 3D konačnog elementa – Poissonova jedn.

Za homogeno i izotropno sredstvo unutar pojedinog konačnog elementa, za 3D probleme opisane Poissonovom ili Laplaceovom diferencijalnom jednađbom vrijedi slijedeći izraz za matricu konačnog elementa:

$$[K] = \epsilon_e \cdot \int_{V_e} [B]^T \cdot [B] \cdot dV$$

Za izoparametrijske **kuboidne** konačne elemente, integracija se provodi numerički na jediničnom 3D konačnom elementu:

$$[K] = \epsilon_e \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T \cdot [B] \cdot |J| \cdot du \cdot dv \cdot dw$$

178

## Preslikani beskonačni elementi

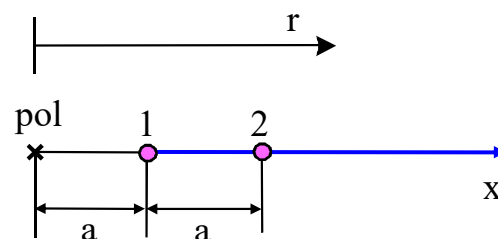
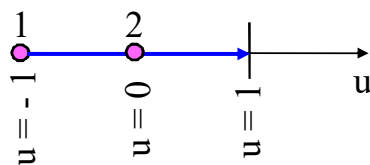
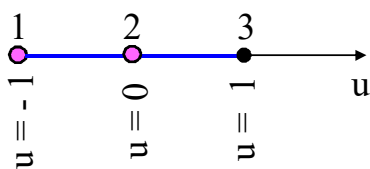
Ako je područje proračuna neograničeno, tj. ako postoji problem otvorenih granica, onda je u tom slučaju praktično koristiti kombinaciju konačnih i beskonačnih elemenata.

Razvijeno je više različitih tipova beskonačnih elemenata, a najjednostavniji za primjenu su tzv. preslikani beskonačni elementi (engl. *mapped infinite elements*) koji slijede logiku izoparametrijskih konačnih elemenata.

Osnovna ideja je da se 1D jedinični element preslika u 1D beskonačni element. Ideja je logična i jednostavna, ali je trebalo pronaći odgovarajuće funkcije preslikavanja.

179

## 1D preslikani beskonačni elementi (1)

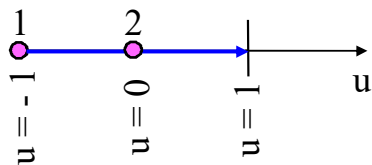


U globalnom sustavu čvor 3 se nalazi u beskonačnosti. Dakle, čvor 3 je fiktivan i njemu se ne pridjeljuje funkcija preslikavanja.

Pol se smješta što bliže mjestu gdje je središte izvora rješenja.

180

## 1D preslikani beskonačni elementi (2)



$$x = \sum_{j=1}^2 \widehat{N}_j(u) \cdot x_j$$

Funkcije preslikavanja su:

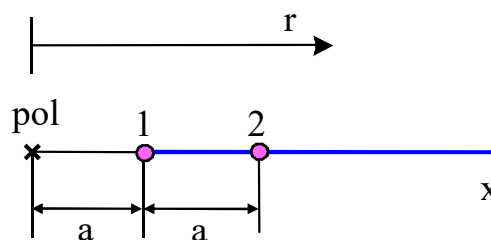
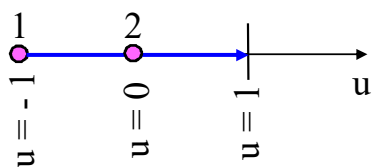
$$\widehat{N}_1(u) = \frac{-2 \cdot u}{1 - u}$$

$$\widehat{N}_2(u) = 1 - \widehat{N}_1(u) = \frac{1 + u}{1 - u}$$

181

## 1D preslikani beskonačni elementi (3)

1D beskonačni element **drugog reda** ima dva čvora u konačnosti za opis funkcije potencijala.



Vrijedi da je:  $\Phi = \frac{b_1}{r} + \frac{b_2}{r^2}$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{a^2} \\ \frac{1}{2 \cdot a} & \frac{1}{4 \cdot a^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix}$$

182

## 1D preslikani beskonačni elementi (4)

Oblikovne funkcije preslikanog beskonačnog elementa drugog reda su:

$$N_1 = N_1(u) = \frac{u^2 - u}{2}$$

$$N_2 = N_2(u) = 1 - u^2$$

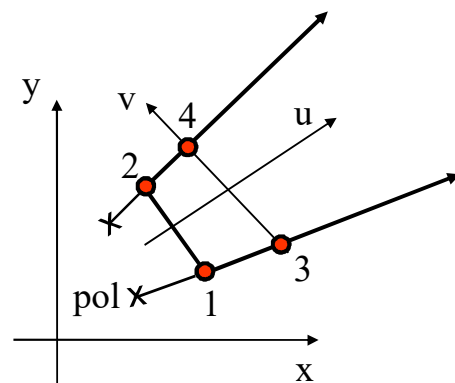
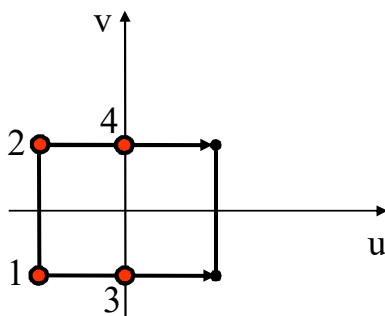
1D beskonačni element trećeg reda ima tri čvora u konačnosti, dok mu je četvrti čvor u beskonačnosti. Tada vrijedi da je:

$$\Phi = \frac{b_1}{r} + \frac{b_2}{r^2} + \frac{b_3}{r^3}$$

183

## 2D preslikani beskonačni elementi (1)

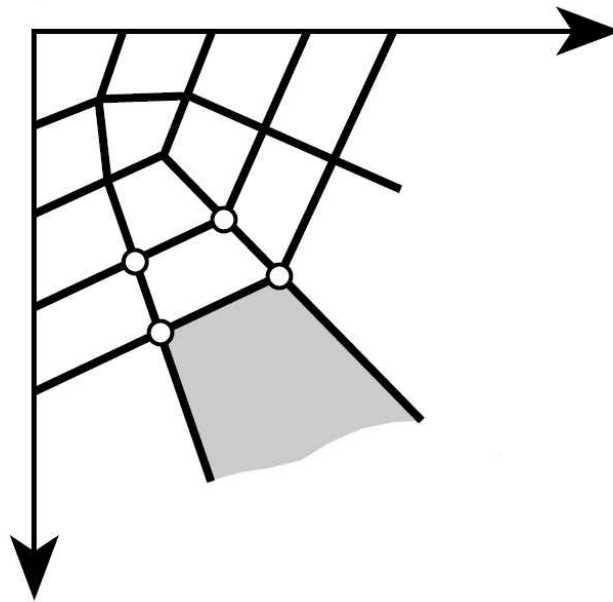
2D preslikani beskonačni element je kombinacija 1D preslikanog beskonačnog elementa duž lokalne osi  $u$  i 1D konačnog elementa duž osi  $v$ . Neka je 2D preslikani beskonačni element četveročvorni.



Preslikavanje

184

## 2D preslikani beskonačni elementi (2)



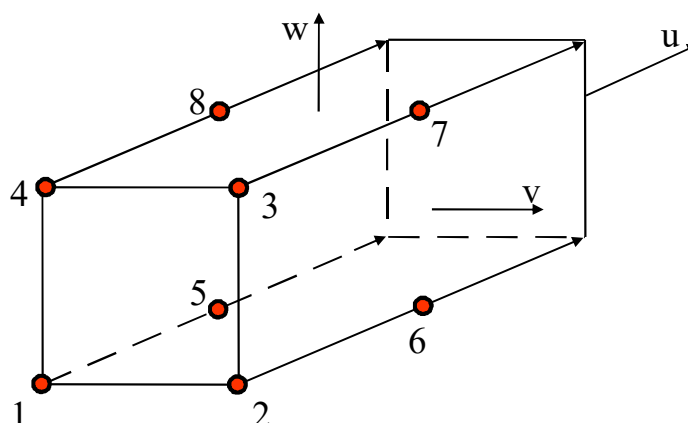
Primjer mreže konačnih i beskonačnih elemenata

185

## 3D preslikani beskonačni elementi

3D preslikani beskonačni element je kombinacija 1D preslikanog beskonačnog elementa duž lokalne osi  $u$  i 2D konačnog elementa duž plohe  $(v, w)$ .

Neka je 3D preslikani beskonačni element osmočvorni.



186

## Rješavanje osno-simetričnih problema (1)

3D osno-simetrični problemi svode se na 2D probleme u sustavu  $(r, z)$ .

$$dV = dx \cdot dy \cdot dz = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr \cdot dz = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot |J| \cdot du \cdot dv$$

$$[K] = \kappa_e \cdot \int_{V_e} [B]^T \cdot [B] \cdot dV = \kappa_e \cdot \int_{S_e} [B]^T \cdot [B] \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr \cdot dz$$

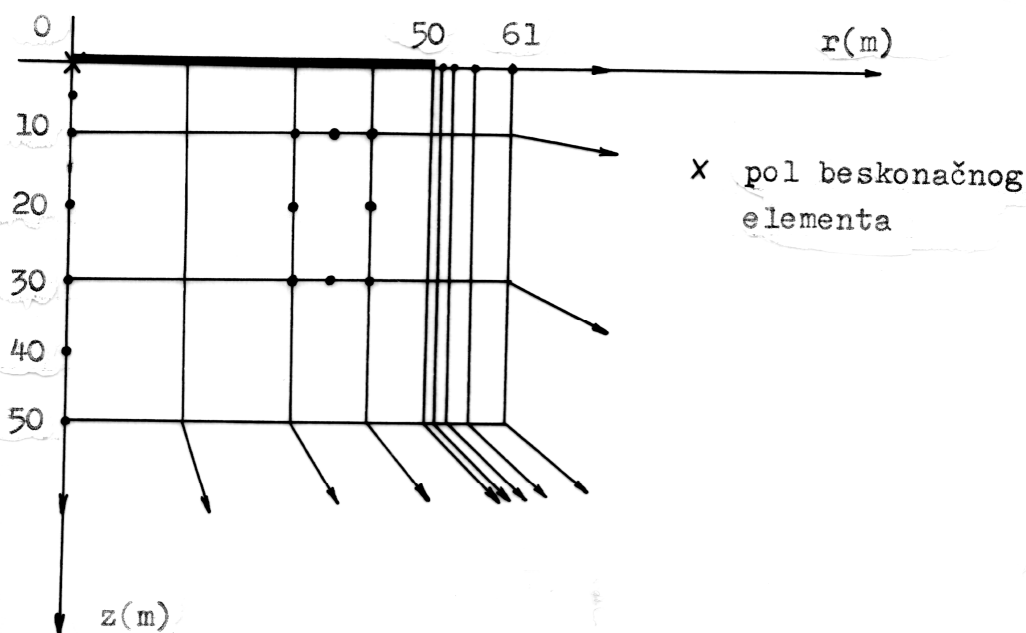
$$[K] = \kappa_e \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T \cdot [B] \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot |J| \cdot du \cdot dv$$

$\kappa_e$  – provodnost (specifična električna vodljivost) tla

187

## Rješavanje osno-simetričnih problema (2)

Primjer: Kružna metalna ploča na površini tla – mreža kon. i besk. elemenata



188

## Metoda graničnih elemenata

Kad je područje proračuna homogeno ili neznatno heterogeno, uspješno se može primijeniti i **metoda graničnih elemenata** (MGE). Na engleskom jeziku to je BEM (Boundary Element Method).

Kad se unutrašnjost područja proračuna ne mora dijeliti na konačne elemente, već se samo granica područja dijeli na granične elemente, onda metoda graničnih elemenata ima neke prednosti u odnosu na metodu konačnih elemenata.

Polazni izraz za MGE dobije se tako da se na polazni izraz za metodu konačnih elemenata ponovno primijeni parcijalna integracija.

189

## 3D MGE – Poissonova jednadžba (1)

Točke na plohi  $S$  treba zasebno razmotriti. Ako se uzmu u obzir i te točke, može se izvodom dokazati da vrijedi poopćeni izraz:

$$C_k \cdot \varphi_k = \oint_{S \setminus T_k} \left( \psi_k \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \cdot \frac{\partial \psi_k}{\partial n} \right) \cdot dS + \int_V \frac{\rho}{\varepsilon} \cdot \psi_k \cdot dV$$

gdje je:

$$C_k = \begin{cases} = 1 & \text{za } T_k \in V \setminus S \\ \in (0, 1) & \text{za } T_k \in S \\ = 0 & \text{za } T_k \notin V \end{cases}$$

190

## 3D MGE – Poissonova jednačba (2)

Rješenje Poissonove diferencijalne jednačbe:

$$\Delta\psi = -\delta(\vec{r} - \vec{r}_k)$$

za 3D probleme je:

$$\psi = \Psi_k = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot |\vec{r} - \vec{r}_k|} + \Theta$$

gdje je  $\Theta$  proizvoljna funkcija koja mora zadovoljavati Laplaceovu diferencijalnu jednačbu:

$$\Delta\Theta = 0$$

191

## 3D MGE – Poissonova jednačba (3)

Funkciju  $\Theta$  sam uveo kod rješavanja 2D problema iz razloga numeričke stabilnosti. Međutim, kod 3D problema za tim nema potrebe pa je logično uzeti da je  $\Theta \equiv 0$ . U tom slučaju vrijedi da je za 3D Poissonove probleme:

$$\psi = \Psi_k = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot |\vec{r} - \vec{r}_k|}$$

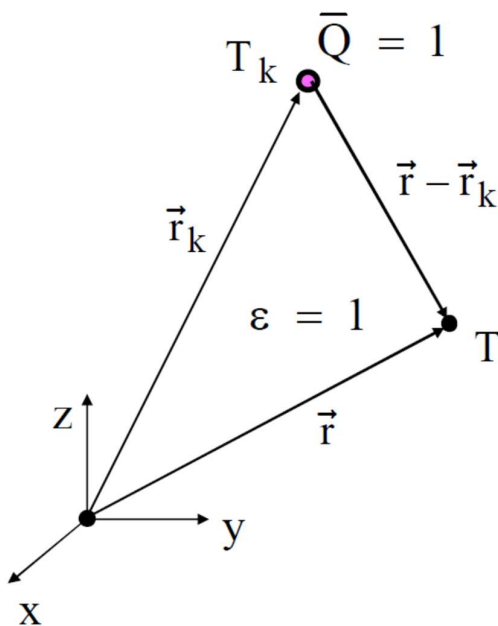
**Pitanje:** Koje je fizikalno značenje funkcije  $\Psi_k$ ?

**Odgovor:** To je potencijal jediničnog točkastog naboja smještenog u točki  $T_k$  koji se nalazi u homogenom i neograničenom sredstvu jedinične dielektričnosti ( $\epsilon = 1$ ).

192



### 3D MGE – Poissonova jednadžba (4)



$$\Psi_k = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot |\vec{r} - \vec{r}_k|}$$

Funkcija  $\Psi_k$  se naziva:

- Fundamentalno rješenje Poissonove jednadžbe,
- Singularno rješenje Poissonove jednadžbe,
- Greenova funkcija.

### 2D MGE – Poissonova jednadžba (1)

3D Poissonov problem  $\rightarrow$  2D Poissonov problem

$$V \rightarrow S$$

$$S \rightarrow \Gamma$$

$$\rho \rightarrow \frac{\partial \lambda}{\partial S} \quad (\text{plošna gustoća linijske gustoće naboja})$$

$$\bar{Q} \rightarrow \lambda \quad (\text{linijska gustoća naboja})$$

$$dV \rightarrow 1 \cdot dS = dS$$

$$dS \rightarrow 1 \cdot ds = ds$$

## 2D MGE – Poissonova jednačba (2)

Za 2D Poissonov problem vrijedi izraz:

$$C_k \cdot \varphi_k = \oint_{\Gamma \setminus T_k} \left( \psi_k \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \cdot \frac{\partial \psi_k}{\partial n} \right) \cdot ds + \int_S \frac{\partial \lambda}{\partial S} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot \psi_k \cdot dS$$

gdje je:

$$C_k = \begin{cases} = 1 & \text{za } T_k \in S \setminus \Gamma \\ \in (0, 1) & \text{za } T_k \in \Gamma \\ = 0 & \text{za } T_k \notin S \end{cases}$$

195

## 2D MGE – Poissonova jednačba (3)

Rješenje Poissonove diferencijalne jednačbe:

$$\Delta \psi = - \delta(\vec{r} - \vec{r}_k)$$

za 3D probleme koji se u rješavanju svode na 2D probleme je:

$$\psi = \Psi_k = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \ln \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} + \Theta$$

gdje je  $\Theta$  proizvoljna funkcija koja mora zadovoljavati Laplaceovu diferencijalnu jednačbu:

$$\Delta \Theta = 0$$

196

## 2D MGE – Poissonova jednadžba (4)

Iz razloga numeričke stabilnosti, za funkciju  $\Theta$  izabrao sam sljedeću konstantu:

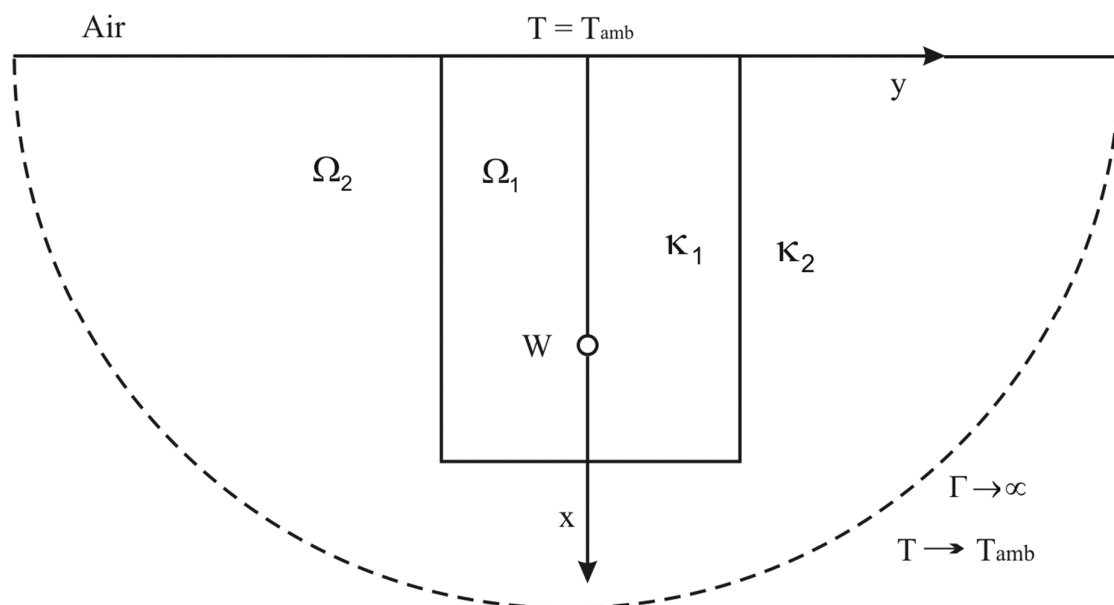
$$\Theta = A = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \ln(100 \cdot d_{\max}) = \text{konst.}$$

gdje je  $d_{\max}$  maksimalna udaljenost između čvorova mreže graničnih elemenata. Uvođenjem ove konstante postiže se to da funkcija  $\Psi_k$  u proračunu ne može poprimiti negativne vrijednosti. Najmanja vrijednost koju može poprimiti je  $\ln(100) = 4,605$ . Dakle, vrijedi da je:

$$\Psi_k = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \ln \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} + A = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \ln \frac{100 \cdot d_{\max}}{|\vec{r} - \vec{r}_k|}$$

197

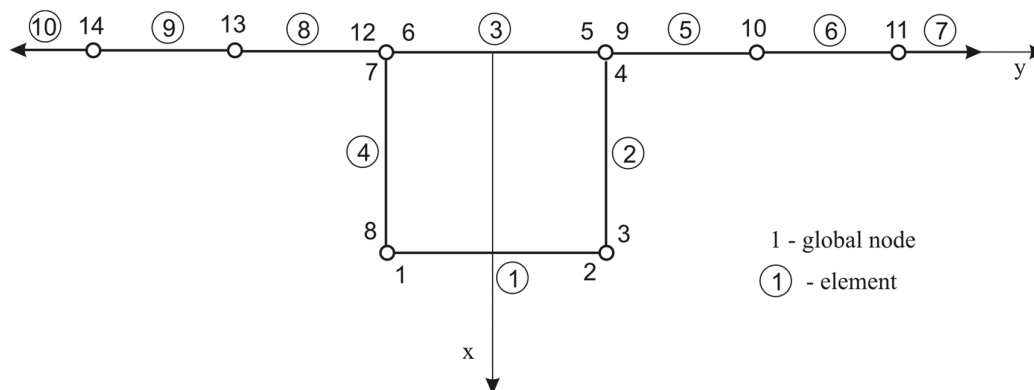
## 2D MGE – Poissonova jednadžba (5)



2D MGE - Područje proračuna numeričkog modela za izračun temperaturnog polja ukopanih elektroenergetskih kabela

198

## 2D MGE – Poissonova jednačina (6)



Podjela granica na „konačne granične elemente” i „beskonačne granične elemente”

Vujević, S.; Srzentić-Gazzari, V.; Gazzari, S., **Two-dimensional BEM for analysis of potential Laplace problems**. *International journal for engineering modelling*, 15 (2002), 1-4; 45-50

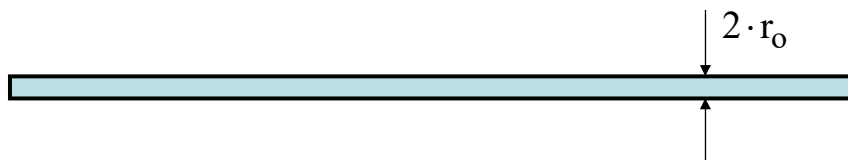
Vujević, S.; Sarajčev, P., **2D BEM analysis of power cables thermal field**, *International Journal for Engineering Modelling*, 19 (2006), 1-4; 87-94

199

## TKE – Rješavanje integralnih jednačina (1)

Rješavanje integralnih jednačina tehnikom konačnih elemenata bit će pokazano na jednostavnom primjeru.

Neka je zadan pravocrtni vodič konačne duljine  $\ell_{\text{vodica}}$  i polumjera  $r_0$ .



Neka je vodič nabijen nabojem iznosa  $+Q$ . Neka se vodič nalazi u homogenom i neograničenom sredstvu dielektričnosti  $\epsilon$ .

Treba pomoću tehnike konačnih elemenata, uz tankožičanu aproksimaciju, izračunati potencijal vodiča, koji je fizikalno konstantan.

200

## TKE – Rješavanje integralnih jednažbi (2)

Pravocrtni vodič se po tehnici konačnih elemenata dijeli na segmente.

Istoimeni naboji se odbijaju pa se stoga sav naboj nalazi na površini vodiča, odnosno na površini segmenta vodiča.

Tankožičana aproksimacija znači da je:  $r_0 \ll \ell = \ell_{\text{segmenta}}$

Po tankožičanoj aproksimaciji, uzima se da se sav naboj nalazi na osi segmenta, a traži se raspodjela potencijala u točkama izvan segmenta, uključujući površinu segmenta. Potencijal unutar segmenta jednak je potencijalu na površini segmenta.

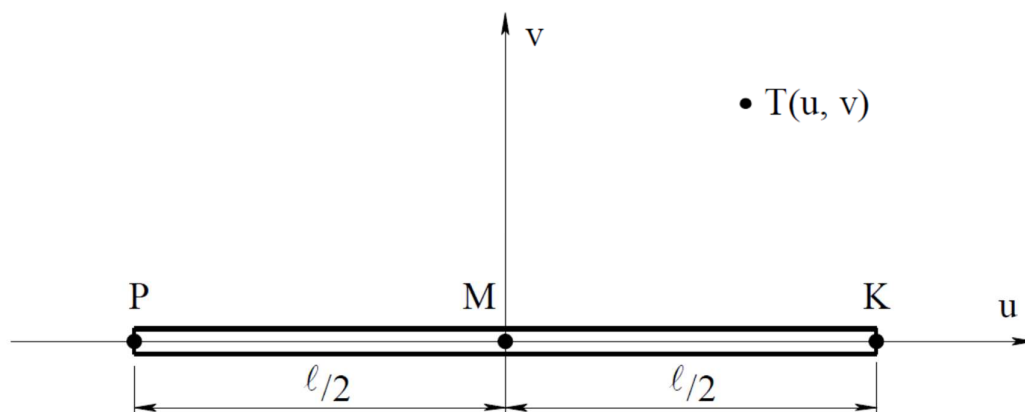
Budući da se u numeričkom modelu naboj nalazi u osi segmenta, onda govorimo o linijskoj gustoći naboja  $\lambda$  duž osi pojedinog segmenta.

201

## TKE – Rješavanje integralnih jednažbi (2)

Radi jednostavnosti, segment se zadaje u lokalnom koordinatnom sustavu  $(u, v)$ . Položaj segmenta u  $(x, y, z)$  sustavu je proizvoljan.

Lokalni sustav  $(u, v)$  je cilindrični sustav, a promatrana točka  $T(u, v)$  je u prvom ili drugom kvadrantu lokalnog sustava  $(u, v)$ .

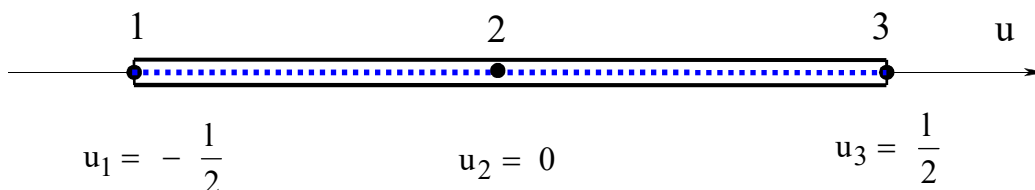


202

### TKE – Rješavanje integralnih jednačbi (3)

Linijska gustoća naboja se aproksimira pomoću linearne kombinacije oblikovnih funkcija. Neka su oblikovne funkcije Lagrangeovi polinomi.

Ako se linijska gustoća naboja duž osi segmenta aproksimira parabolom, onda segment ima 3 lokalna čvora. Neka su čvorovi ekvidistantni.



$$N_1 = \frac{u}{l} \cdot \left( \frac{2 \cdot u}{l} - 1 \right) ; \quad N_2 = \left( 1 - \frac{4 \cdot u^2}{l^2} \right) ; \quad N_3 = \frac{u}{l} \cdot \left( \frac{2 \cdot u}{l} + 1 \right)$$

203

### TKE – Rješavanje integralnih jednačbi (4)

Neka su svi segmenti istog tipa, tj. neka imaju isti broj lokalnih čvorova. Neka je ukupan broj lokalnih čvorova segmenta NCE.

Aproksimacija linijske gustoće naboja duž osi k-tog segmenta opisana je izrazom:

$$\lambda_k = \sum_{j=1}^{NCE} N_{kj} \cdot \lambda_{kj}$$

gdje je:

$\lambda_k$  – funkcija linijske gustoće naboja duž osi k-tog segmenta,

$\lambda_{kj}$  – linijska gustoća naboja u j-tom čvoru k-tog segmenta,

$N_{kj}$  – oblikovna funkcija pridružena j-tom čvoru k-tog segmenta.

204

## TKE – Rješavanje integralnih jednažbi (5)

Integracija po osima svih NS segmenata provodi se prema sljedećem izrazu:

$$\varphi = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \sum_{k=1}^{NS} \int_{l'_k} \frac{\lambda_k \cdot dl'_k}{|\vec{r} - \vec{r}'_k|}$$

koji nakon uvrštenja aproksimacija linijske gustoće struje duž osi segmenta prelazi u oblik:

$$\varphi = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \sum_{k=1}^{NS} \sum_{j=1}^{NCE} \left( \int_{l'_k} \frac{N_{kj} \cdot dl'_k}{|\vec{r} - \vec{r}'_k|} \right) \cdot \lambda_{kj}$$

205

## TKE – Rješavanje integralnih jednažbi (6)

Praktičnije je, u ovom konkretnom slučaju, ne zahtijevati da kontinuitet linijske gustoće naboja na granici dvaju segmenata bude zadovoljen.

Nepoznanice su:

- Linijske gustoće naboja u čvorovima segmenata

$$\lambda_{kj} ; k = 1, 2, \dots, NS; j = 1, 2, \dots, NCE$$

- Potencijal vodiča

$$\varphi = \varphi_0 = \text{konst.}$$

206

## TKE – Rješavanje integralnih jednačbi (7)

Dakle, raspodjela potencijala u 3D prostoru opisana je izrazom:

$$\varphi = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \sum_{k=1}^{NS} \sum_{j=1}^{NCE} \left( \int_{\ell'_k} \frac{N_{kj} \cdot d\ell'_k}{|\vec{r} - \vec{r}'_k|} \right) \cdot \lambda_{kj}$$

Ovaj izraz opisuje i raspodjelu potencijala po vanjskoj plohi bilo kojeg p-tog segmenta. Naravno, fizikalno konstantni potencijal p-tog segmenta je približno jednak onome što daje prethodni izraz za raspodjelu potencijala:

$$\Phi_p \approx \varphi = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \sum_{k=1}^{NS} \sum_{j=1}^{NCE} \left( \int_{\ell'_k} \frac{N_{kj} \cdot d\ell'_k}{|\vec{r} - \vec{r}'_k|} \right) \cdot \lambda_{kj}$$

207

## TKE – Rješavanje integralnih jednačbi (8)

Idući korak je primjena osnovne leme varijacijskog računa

$$\int_{\ell_p} (\varphi - \Phi_p) \cdot h_{pq} \cdot d\ell_p = 0 \quad ; \quad p = 1, \dots, NS \quad ; \quad q = 1, \dots, NCE$$

gdje je:

$\Phi_p$  – potencijal p-tog segmenta,

$h_{pq}$  – težinska funkcija pridružena q-tom čvoru p-tog segmenta.

Neka je:

$$\Phi_p = \Phi_o \quad ; \quad \forall p$$

208



## TKE – Rješavanje integralnih jednačbi (9)

Primijeni li se Galjerkin-Bubnovljeva metoda, iz osnovne leme varijacijskog računa slijedi da je:

$$\int_{l_p} (\varphi - \Phi_o) \cdot N_{pq} \cdot dl_p = 0 \quad ; \quad p = 1, \dots, NS \quad ; \quad q = 1, \dots, NCE$$

Prethodni sustav daje NS x NCE jednačbi s ukupnim brojem nepoznanica NS x NCE + 1. Stoga je potrebno sustavu linearnih jednačbi dodati još jednu jednačbu:

$$\sum_{k=1}^{NS} \sum_{j=1}^{NCE} \left( \int_{l'_k} N_{kj} \cdot dl'_k \right) \cdot \lambda_{kj} = Q$$

209

## TKE – Rješavanje integralnih jednačbi (10)

Simetrični sustav NS x NCE + 1 linearnih jednačbi s istim brojem nepoznanica glasi:

$$\frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon} \cdot \sum_{k=1}^{NS} \sum_{j=1}^{NCE} \left( \int_{l_p} \int_{l'_k} \frac{N_{kj} \cdot N_{pq} \cdot dl'_k \cdot dl_p}{|\vec{r}_p - \vec{r}'_k|} \right) \cdot \lambda_{kj}$$

$$- \Phi_o \cdot \int_{l_p} N_{pq} \cdot dl = 0 \quad ; \quad \forall p, \forall q$$

$$- \sum_{k=1}^{NS} \sum_{j=1}^{NCE} \left( \int_{l'_k} N_{kj} \cdot dl'_k \right) \cdot \lambda_{kj} = - Q$$

210

## TKE – Rješavanje integralnih jednačbi (11)

Nakon što se rješenjem sustava jednačbi odrede vrijednosti linijske gustoće naboja u svim globalnim čvorovima i potencijal vodiča, može se izračunati potencijal u bilo kojoj točki prostora iz izraza:

$$\varphi = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \sum_{k=1}^{NS} \sum_{j=1}^{NCE} \left( \int_{l'_k} \frac{N_{kj} \cdot dl'_k}{|\vec{r} - \vec{r}'_k|} \right) \cdot \lambda_{kj}$$

U praksi se, za rješavanje ovakvog i njemu sličnih problema, najčešće vrlo uspješno koristi tzv. **metoda srednjeg potencijala**, koja je poseban slučaj Galjerkin-Bubnovljeve metode za  $NCE = 1$ .

211

## TKE – Rješavanje integralnih jednačbi (12)

Kod metode srednjeg potencijala, oblikovne i težinske funkcije su jedinice, a posljedica toga je da se linijska gustoća struje duž osi segmenta aproksimira konstantom:

$$\lambda_k = 1 \cdot \lambda_{k1} = \frac{Q_k}{l_k} \quad ; \quad k = 1, 2, \dots, NS$$

gdje je  $Q_k$  naboj  $k$ -tog segmenta. Slijedi da je potencijal segmenta:

$$\int_{l_p} (\varphi - \Phi_p) \cdot 1 \cdot dl_p = 0 \quad ; \quad p = 1, \dots, NS$$

aproksimiran **srednjim potencijalom** duž vanjske plohe segmenta:

$$\Phi_p = \Phi_o = \frac{1}{l_p} \cdot \int_{l_p} \varphi \cdot dl_p \quad ; \quad p = 1, \dots, NS$$

212

## Bridni elementi – Edge elements (1)

Bridni elementi se još nazivaju i vektorskim konačnim elementima. Pomoću njih se izravno rješavaju problemi opisani Maxwellovim dif. jednažbama.

U tom kontekstu, klasični konačni elementi se mogu nazvati čvornim konačnim elementima. Pomoću njih se rješavaju jednažbe potencijala.

Kod čvornih konačnih elemenata, nepoznanica se pridružuje čvoru, dok se kod bridnih konačnih elemenata nepoznanica pridružuje usmjerenom bridu.

Nema smisla uvoditi 1D bridne elemente pa govorimo o 2D i 3D bridnim elementima.

Svakom usmjerenom bridu konačnog elementa pridružuje se njemu tangencijalna komponenta vektora i vektorska oblikovna funkcija.

213

## Bridni elementi – Edge elements (2)

Neka se po bridnom konačnom elementu aproksimira vektor jakosti električnog polja  $\vec{E}$ .

Razmatrani vektor po konačnom elementu aproksimira se pomoću sljedećeg izraza:

$$\vec{E} = \sum_{j=1}^{NBE} \vec{N}_j \cdot E_j$$

gdje je:

$NBE$  – ukupan broj usmjerenih bridova konačnog elementa,

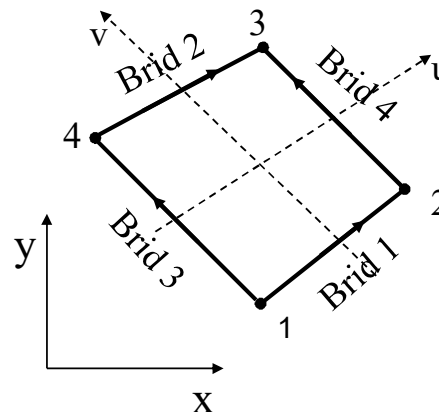
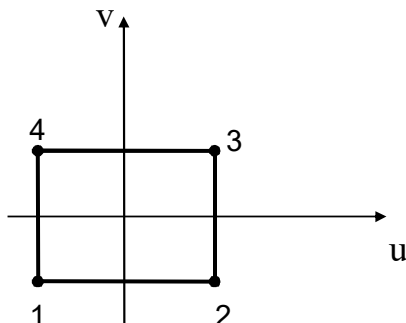
$\vec{N}_j$  – vektorska oblikovna funkcija pridružena j-tom bridu,

$E_j$  – jakost električnog polja duž j-tog brida (tangencijalna komponenta).

214

## Bridni elementi – Edge elements (3)

Četverobridni 2D element



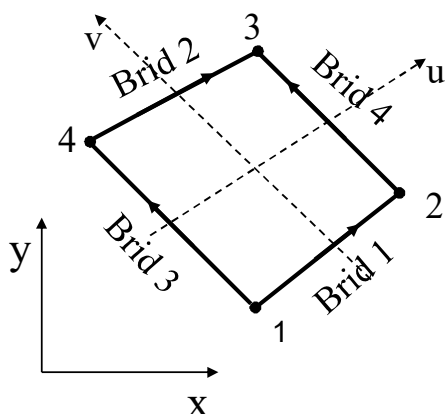
$$\vec{E} = \sum_{j=1}^4 \vec{N}_j \cdot E_j$$

Bridni konačni elementi osiguravaju kontinuitet tangencijalne komponente vektora jakosti električnog polja.

215

## Bridni elementi – Edge elements (4)

Četverobridni 2D element



$$\vec{N}_1 = \frac{\ell_1}{4} \cdot (1 - v) \cdot \nabla u$$

$$\vec{N}_2 = \frac{\ell_2}{4} \cdot (1 + v) \cdot \nabla u$$

$$\vec{N}_3 = \frac{\ell_3}{4} \cdot (1 - u) \cdot \nabla v$$

$$\vec{N}_4 = \frac{\ell_4}{4} \cdot (1 + u) \cdot \nabla v$$

gdje je  $\ell_i$  duljina i-tog brida.

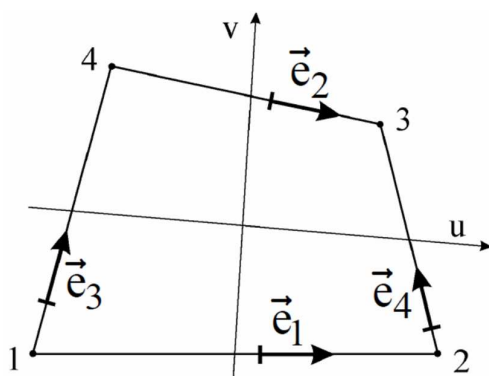
216

## Bridni elementi – Edge elements (5)

Vrijedi da je tangencijalna komponenta vektorske oblikovne funkcije jednaka jedinici na vlastitom bridu i jednaka nuli na ostalim bridovima:

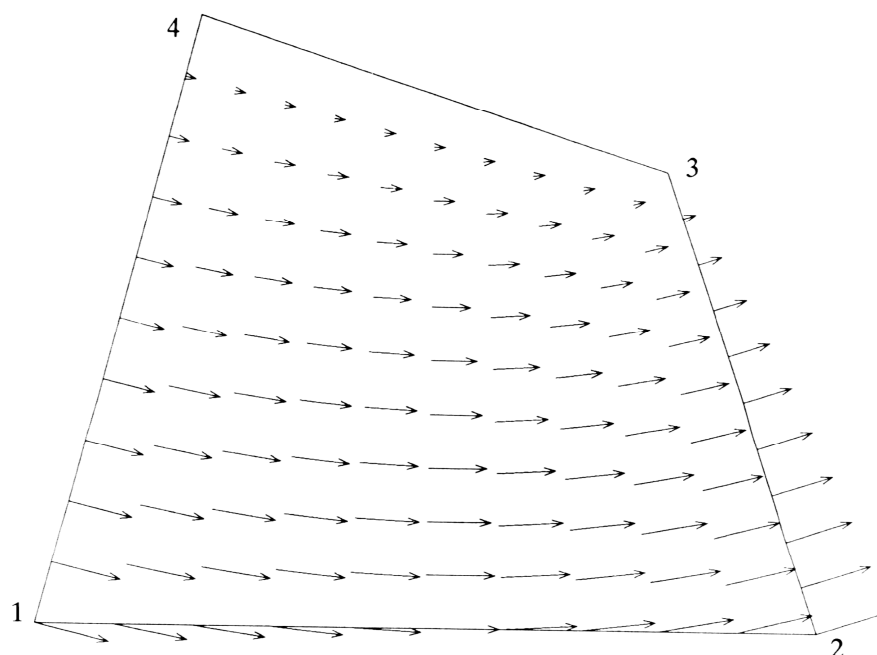
$$\vec{N}_j \cdot \vec{e}_j = 1 \quad \text{duž } j\text{-tog usmjerenog brida}$$

$$\vec{N}_j \cdot \vec{e}_i = 0 \quad \text{duž } i\text{-tog usmjerenog brida, } i \neq j$$



$\vec{e}_i$  – jedinični vektor  
i-tog usmjerenog brida;  
u općem slučaju  
jedinična tangenta  
na i-ti brid

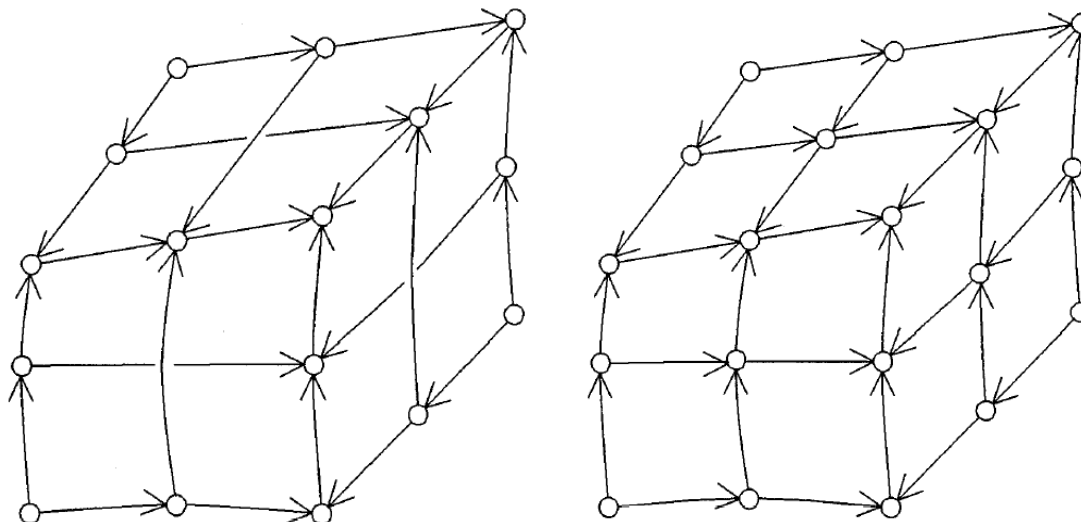
## Bridni elementi – Edge elements (6)



Oblikovna vektorska funkcija  $\vec{N}_1$  pridružena bridu 1.

## Bridni elementi – Edge elements (7)

Dosad spominjani bridni elementi su prvog reda, odnosno oni omogućuju linearnu aproksimaciju vektora po konačnom elementu. U praksi se koriste i bridni elementi višeg reda.



Bridni elementi drugog reda

219

## CNFT (1)

FFT / IFFT algorithm je zasnovan na međusobno zavisnom ekvidistantnom uzorkovanju u vremenskoj domeni i u frekvencijskoj domeni.

FFT / IFFT zahtijeva upotrebu vremenskog prozora koji mora biti odabran na takav način da je funkcija zanemariva nakon tog trenutka.

FFF / IFFT algoritam može dati nefizikalne rezultate kod tranzijentne analize elektromagnetskih pojava.

Štoviše, ovaj algoritam je nefleksibilan, jer izbor samo dvaju parametara u vremenskoj domeni utječu na iznos svih ostalih parametara i u vremenskoj domeni i u frekvencijskoj domeni.

220

## CNFT (2)

Fourierova transformacija impulsne struje izvora  $i(t)$  glasi:

$$\bar{I}(\omega) = \int_0^{+\infty} i(t) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt$$

$\bar{I}(\omega)$  - impulsna struja izvora u frekvencijskoj domeni,

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f - \text{kružna frekvencija}$$

U općem slučaju ovaj se integral ne može riješiti analitički.

Stoga je razvijen CNFT algoritam za kontinuiranu numeričku Fourierovu transformaciju.

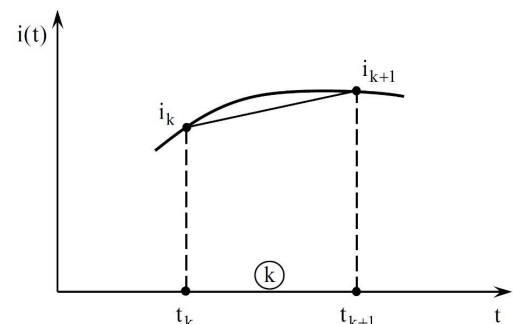
221

## CNFT (3)

CNFT algoritam je utemeljen na aproksimaciji struje  $i(t)$  pomoću tehnike konačnih elemenata. Koriste se dvočvorni konačni elementi. To znači da se struja  $i(t)$  linearizira po dijelovima. Uzorkovanje je proizvoljno.

$$i_{\text{FET}}(t) = \frac{t_{k+1} - t}{t_{k+1} - t_k} \cdot i_k + \frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k} \cdot i_{k+1}$$

$$\bar{I}_{\text{CNFT}}(\omega) = \sum_{k=1}^{NEL_t} \int_{t_k}^{t_{k+1}} i_{\text{FET}}(t) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt$$



$NEL_t$  ukupan broj konačnih elemenata – vremenskih segmenata

222

## CNFT (4)

Analitičko rješenje Fourierovog integrala glasi:

$$\bar{I}_{\text{CNFT}}(\omega) = \sum_{k=1}^{\text{NEL}_t} \frac{(i_{k+1} - i_k) \cdot \bar{A}_k + (t_{k+1} \cdot i_k - t_k \cdot i_{k+1}) \cdot \bar{B}_k}{t_{k+1} - t_k}$$

gdje za  $\omega \neq 0$ :

$$\bar{A}_k = \frac{e^{-j\omega t_{k+1}} - e^{-j\omega t_k}}{\omega^2} + j \cdot \frac{t_{k+1} \cdot e^{-j\omega t_{k+1}} - t_k \cdot e^{-j\omega t_k}}{\omega}$$

$$\bar{B}_k = j \cdot \frac{e^{-j\omega t_{k+1}} - e^{-j\omega t_k}}{\omega}$$

dok je za  $\omega = 0$ :

$$\bar{A}_k = \frac{t_{k+1}^2 - t_k^2}{2}$$

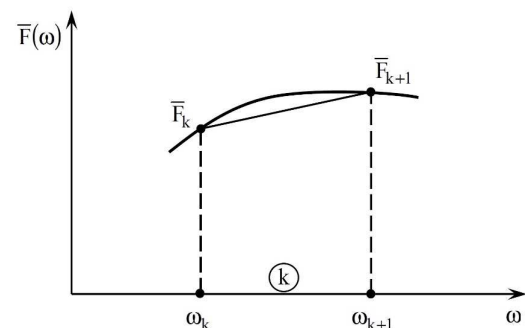
$$\bar{B}_k = t_{k+1} - t_k$$

223

## ICNFT (1)

Inverzna Fourierova transformacija funkcije  $\bar{F}(\omega)$  glasi:

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{+\infty} \text{Re}[\bar{F}(\omega) \cdot e^{j\omega t}] \cdot d\omega$$



ICNFT algoritam je utemeljen na aproksimaciji funkcije  $\bar{F}(\omega)$  pomoću tehnike konačnih elemenata. Koriste se dvočvorni konačni elementi. Uzorkovanje je proizvoljno.

$$\bar{F}_{\text{FET}}(\omega) = \frac{\omega_{k+1} - \omega}{\omega_{k+1} - \omega_k} \cdot \bar{F}_k + \frac{\omega - \omega_k}{\omega_{k+1} - \omega_k} \cdot \bar{F}_{k+1}$$

224



## ICNFT (2)

Slijedi da je:

$$f_{\text{ICNFT}}(t) = \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{\text{NEL}_{\omega}} \int_{\omega_k}^{\omega_{k+1}} \text{Re} \left[ \bar{F}_{\text{FET}}(\omega) \cdot e^{j\omega \cdot t} \right] \cdot d\omega$$

gdje je  $\text{NEL}_{\omega}$  ukupan broj konačnih elemenata (frekvencijskih segmenata).

Nakon analitičke integracije dobije se sljedeća suma:

$$f_{\text{ICNFT}}(t) = \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{\text{NEL}_{\omega}} \text{Re} \left[ \frac{(\bar{F}_{k+1} - \bar{F}_k) \cdot \bar{C}_k + (\omega_{k+1} \cdot \bar{F}_k - \omega_k \cdot \bar{F}_{k+1}) \cdot \bar{D}_k}{\omega_{k+1} - \omega_k} \right]$$

225

## ICNFT (3)

gdje je za  $t \neq 0$ :

$$\bar{C}_k = \frac{e^{j\omega_{k+1} \cdot t} - e^{j\omega_k \cdot t}}{t^2} + j \cdot \frac{\omega_k \cdot e^{j\omega_k \cdot t} - \omega_{k+1} \cdot e^{j\omega_{k+1} \cdot t}}{t}$$

$$\bar{D}_k = j \cdot \frac{e^{j\omega_k \cdot t} - e^{j\omega_{k+1} \cdot t}}{t}$$

dok je za  $t = 0$ :

$$\bar{C}_k = 0 \quad \bar{D}_k = 0$$

Funkcija  $f(t)$  u trenutku  $t = 0$  jednaka je nuli.

226

## ICNFT (4)

I uzorkovanje u frekvencijskoj domeni je nejednoliko:

$$\omega_1 = 0$$

$$\omega_2 = 2 \cdot \pi \cdot 0,2 \text{ rad/s}$$

$$\omega_3 = 2 \cdot \omega_2$$

$$\omega_k = \omega_{k-1} + 1,05 \cdot (\omega_{k-1} - \omega_{k-2}) \quad ; \quad k = 4, 5, \dots, \text{NEL}_\omega$$

Uzorkovanje završava kad je ispunjen uvjet:  $\frac{F(\omega_k)}{F(\omega_2)} < 10^{-7}$

227

## ICNFT (5)

Za  $\omega_1 = 0$  vrijednost funkcije može se aproksimirati korištenjem sljedeće ekstrapolacije:

$$\bar{F}_1 = \text{Re}(2 \cdot \bar{F}_2 - \bar{F}_3)$$

Ova aproksimacija ima smisla ako DC slučaj zahtijeva poseban algoritam.

To je bolje no  $\omega_1 = 0$  aproksimirati s  $\omega_1 = 10^{-6}$ .

Ako je DC rješenje lako dobiti, onda je ova aproksimacija nepotrebna.

228

# Hvala na pažnji!



# Pitanja?