

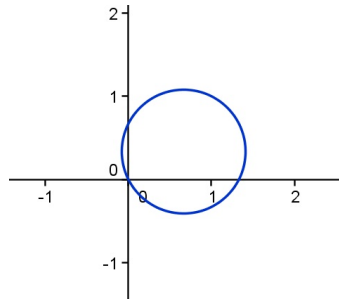
Rješenja kratke provjere znanja za grupe 1,3,5,7,9

Grupa A

Zadatak 1. Neka je $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. $|z + i| = |1 - 2z| \Rightarrow |x + i(y + 1)| = |(1 - 2x) + i(-2y)|$. Nakon kvadriranja i svođenja sredenog izraza za potpuni kvadrat dobivamo:

$$\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$$

Skup točaka koji zadovoljava gornju jednadžbu dan je donjom slikom:



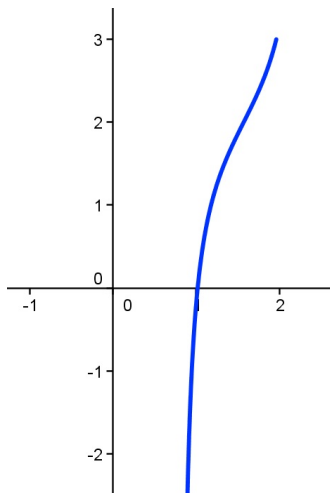
Zadatak 2. a) Neka je $f: S_1 \rightarrow S_2$, to jest $D(f) = S_1$, $f(D) \subseteq S_2$. Preslikavanje f je surjeksija ako je $f(D) = S_2$.

b) Asimptote su pravci $x = \frac{\pi}{4}$ i $x = \frac{3\pi}{4}$. Nadalje,

$$\operatorname{tg}\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + 2 = 2, \quad \operatorname{tg}\left(2 \cdot \frac{5\pi}{8}\right) + 2 = 3.$$

c) Iz b) dijela zadatka slijedi da je $f\left(\left\langle \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{8} \right\rangle\right) = \langle -\infty, 3 \rangle$, pa je traženi $Y = \langle -\infty, 3 \rangle$.

Graf funkcije $\operatorname{tg}(2x) + 2$ dan je na donjoj slici:



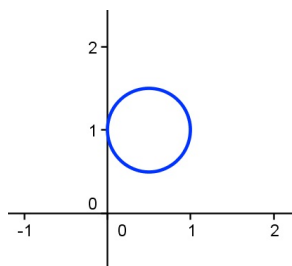
Zadatak 3. Računajući inverz na standardan način dobivamo: $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{4 + e^x}\right)$. Budući da je $\operatorname{Im}(f) = D(f^{-1})$, to iz uvjeta $\frac{e^x - 1}{4 + e^x} > 0$ slijedi da je $x > 0$, to jest $\operatorname{Im}(f) = \langle 0, +\infty \rangle$.

Grupa B

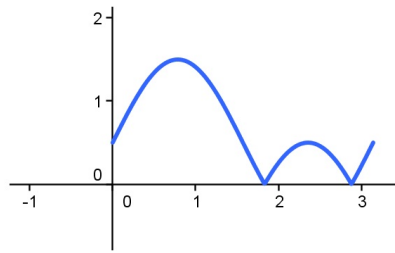
Zadatak 1. Neka je $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. $\frac{1}{z-i} = \frac{1}{x+i(y-1)} = \frac{x-i(y-1)}{x^2+(y-1)^2} \Rightarrow \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z-i}\right) = \frac{x}{x^2+(y-1)^2}$. Nakon izjednačavanja izraza s 1 te svođenja na potpuni kvadrat dobivamo:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = \frac{1}{4}$$

Skup točaka koji zadovoljava gornju jednadžbu dan je donjom slikom:



- Zadatak 2.** a) Neka je $f: S_1 \rightarrow S_2$, to jest $D(f) = S_1$, $f(D) \subseteq S_2$. Preslikavanje f je injekcija ako različiti originali imaju uvijek različite slike.
 b) Graf funkcije $|\sin(2x) + \frac{1}{2}|$ dan je slikom koja se nalazi na sljedećoj stranici.
 c) Funkcija f nije injekcija jer je npr. $f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$.



Zadatak 3. Računajući inverz na standardan način dobivamo: $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1+2e^x}{1-e^x}\right)$. Budući da je $Im(f) = D(f^{-1})$, to iz sljedeća dva uvjeta: $1-e^x \neq 0$ i $\frac{1+2e^x}{1-e^x} > 0$ slijedi da je $x < 0$, to jest $Im(f) = \langle -\infty, 0 \rangle$.