

**1.a)** Ako je neka tvrdnja koja ovisi o prirodnom broju  $n$  istinita za neki prirodan broj  $n_0$  i ako iz istinitosti te tvrdnje za  $n \in \mathbb{N}$  ( $n \geq n_0$ ) slijedi da je istinita i za  $n+1$ , onda je ona istinita i za sve  $n \in \mathbb{N}$  koji su veći od  $n_0$ .

**b)** B.l.  $n=1$

$$L = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$$

$$D = 1 - \frac{1}{(1+1)!} = 1 - \frac{1}{2!} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$L = D$$

P.I. Pretpostavimo da vrijedi  $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$

K.I. Dokazujemo da tvrdnja vrijedi i za  $n+1$ , tj. da vrijedi

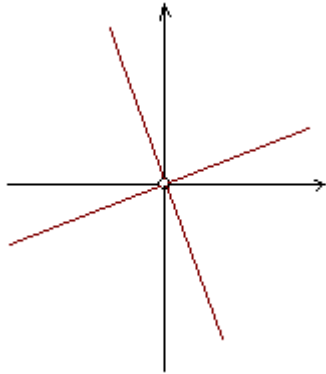
$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{n+1}{(n+2)!} = 1 - \frac{1}{(n+2)!}$$

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!} + \frac{n+1}{(n+2)!} = (\text{iz pretpostavke}) = 1 - \frac{1}{(n+1)!} + \frac{n+1}{(n+2)!} =$$

$$= 1 - \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+2} + \frac{n+1}{(n+2)(n+1)!} = 1 - \frac{(n+2) - (n+1)}{(n+2)(n+1)!} = 1 - \frac{n+2-n-1}{(n+2)!} = 1 - \frac{1}{(n+2)!}$$

**2.a)**  $\arg(z^4) = \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \arg(z) = \frac{\frac{1}{2}\pi + 2k\pi}{4} = \frac{\pi}{8} + \frac{2k\pi}{4}, \quad k = 0, 1, 2, 3$$



(ishodište je isključeno iz rješenja)

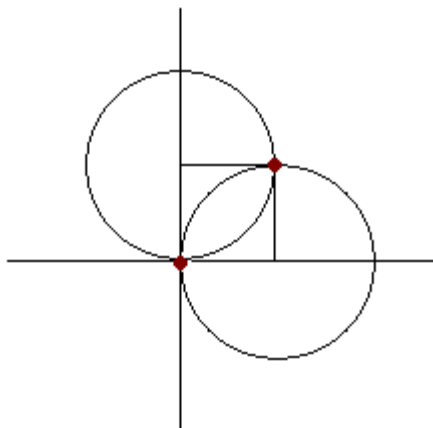
**b)**  $|z - 2| = |z - 2i| = 2$

1. način:

$|z - 2| = 2 \Rightarrow$  kružnica radijusa 1 sa središtem u  $(2,0)$

$|z - 2i| = 2 \Rightarrow$  kružnica radijusa 1 sa središtem u  $(0,2)$

$|z - 2| = |z - 2i| \Rightarrow$  tražimo točke u kojima se te dvije kružnice sijeku



$z_1 = 0$

$z_2 = 2 + 2i$

2. način:

$$|z-2|=2 \Rightarrow |(x-2)+iy|=2 \Rightarrow \sqrt{(x-2)^2+y^2}=2/2 \Rightarrow (x-2)^2+y^2=4$$

$$|z-2i|=2 \Rightarrow |x+i(y-2)|=2 \Rightarrow \sqrt{x^2+(y-2)^2}=2/2 \Rightarrow x^2+(y-2)^2=4$$

$$|z-2|=|z-2i| \Rightarrow (x-2)^2+y^2=x^2+(y-2)^2 \Rightarrow x^2-4x+4+y^2=x^2+y^2-4y+4 \Rightarrow -4x=-4y \Rightarrow x=y$$

Kad to uvrstimo u jednu od dvije jednakosti koje smo dobili gore dobijemo

$$x^2+(y-2)^2=4 \Rightarrow y^2+(y-2)^2=4 \Rightarrow y^2+y^2-4y+4=4 \Rightarrow 2y^2-4y=0 \Rightarrow y^2-2y=0 \Rightarrow y(y-2)=0$$

$$y_1=0, x_1=0 \rightarrow z_1=0$$

$$y_2=2, x_2=2 \rightarrow z_2=2+2i$$

**3.**  $f(x) = \ln\left(2 \arccos x - \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $D_f = ?$

$$2 \arccos x - \frac{\pi}{2} > 0 \Rightarrow 2 \arccos x > \frac{\pi}{2} \Rightarrow \arccos x > \frac{\pi}{4}$$

Domena funkcije arccos je  $[-1, 1]$  i slika joj je  $[0, \pi]$ , tj  $\arccos x \in [0, \pi]$ . Iz te činjenice i gornjeg uvjeta dobivamo da je  $\arccos x \in \left(\frac{\pi}{4}, \pi\right]$ .

Pošto je arccos padajuća funkcija, tj vrijedi  $\arccos \frac{\pi}{4} > \arccos \pi$ , zaključujemo da je

$$x \in \left[\cos \pi, \cos \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow x \in \left[-1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \text{ tj } D_f = \left[-1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

**4.**  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Matrice komutiraju:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} b & 2b \\ d & 2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a+2c & b+2d \end{bmatrix}$$

$$b = 0, 2b = 0$$

$$2d = b + 2d$$

$$d = a + 2c \Rightarrow c = \frac{d - a}{2}$$

Suma na glavnoj dijagonali jednaka je nuli, tj  $a + d = 0 \Rightarrow d = -a$

$$\Rightarrow c = \frac{-a - a}{2} \Rightarrow c = -a$$

Dobili smo  $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ -a & -a \end{bmatrix}$