

Rješenja 6. domaće zadaće iz Matematike 1

1. Gomilišta niza (a_n) su $\{-1/2, 1/2\}$ dok limes ne postoji. Niz (b_n) je konvergentan s limesom 0.
2. A. $\frac{2}{3}$ B. 0 C. 3
3. A. 0 B. $\frac{1}{2}$ C. $+\infty$
4. A. 0 B. 1 C. $+\infty$
5. A. $\frac{5}{3}$ B. 0 C. 9
6. Za $a < \frac{3}{2}$ limes je $+\infty$, a za $a = \frac{3}{2}$ limes je $-\frac{9}{2}$, za $a > \frac{3}{2}$ limes je $-\infty$.
7. A. Za svaki $\epsilon > 0$ postoji n_0 takav da je $\frac{1}{n_0} < \epsilon$. Neka je $n \geq n_0$, tada

$$\left| \frac{\sin n}{n} - 0 \right| = \frac{|\sin n|}{n} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \epsilon.$$

B. Koristeći teorem o sendviču dobiva se da je limes jednak 0.

8. A. 0 B. 4
9. A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{1}{2}$
10. A. 2 B. 1
11. A. $\frac{1}{2}$ B. 2
12. $\frac{1}{2}$
13. $\frac{1}{4}$
14. A. e^{-1} B. e^{-2} .

Rješenje ispravljenog 14.B. zadatka jest $e^{-\frac{1}{2}}$.

15. A. e^{-1} B. e^{-1}

Rješenje ispravljenog 15.A. zadatka jest $e^{-\frac{1}{3}}$.

16. Vidimo da je niz omeđen odozdo s 0. Vrijedi da je $a_1 > a_2$. Pretpostavimo da je $a_{n+1} < a_n$ tada je $a_{n+2} = \frac{1+a_{n+1}}{2} < \frac{1+a_n}{2} = a_{n+1}$ dakle niz je padajući i omeđen odozdo, dakle konvergentan. Neka je L njegov limes tada imamo $2L = L + 1$ odnosno $L = 1$.

17. Vidimo da je omeđen s 10 jer $a_1 = \sqrt{6} < 10$ i iz $a_n < 10$ dobivamo da je $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} < \sqrt{6 + 10} = 4 < 10$. Niz je očito rastući, dakle konvergentan. Neka je L njegov limes tada $L^2 = L + 6$, slijedi da je $L = 3$.
18. Vidimo da je omeđen s 3 jer $a_1 = \sqrt[3]{9} < 3$ i iz $a_n < 3$ dobivamo da je $a_{n+1} = \sqrt[3]{9a_n} < \sqrt[3]{27} = 3$. Niz je očito rastući, dakle konvergentan. Neka je L njegov limes, tada $L^3 = 9L$, odnosno $L = 3$.
19. Imamo da je $a_1 < a_2$. Pretpostavimo da je $a_n < a_{n+1}$, tada je $a_n + 3 < a_{n+1} + 3$, tada je $\frac{1}{a_n + 3} > \frac{1}{a_{n+1} + 3}$, tada je $a_{n+1} = 3 - \frac{1}{a_n + 3} < 3 - \frac{1}{a_{n+1} + 3} = a_{n+2}$, dakle niz je rastući. Kako je omeđen odozgo s 3 imamo da je konvergentan. Neka je L njegov limes, tada $L(L + 3) = 3(L + 3) - 1$, odnosno $L = 2\sqrt{2}$.
20. Neka je $f(x) = x(2 - x)$. Funkcija f postiže maksimum 1 u točki 1. Ako je $x \in \langle 0, 2 \rangle$, tada je $f(x) \in \langle 0, 1 \rangle$, dakle je $0 < a_n \leq 1$ za sve $n \geq 2$. Pošto se niz (a_n) stabilizira kao rastući, dobivamo da je konvergentan. Neka je L njegov limes tada $L = 2L - L^2$, odnosno $L = 1$.