Rješenja 1. školske zadaće iz Matematike 1

grupe 04,08,10

29.09.2008.

Grupa A

1. Računanjem za male n-ove dolazimo na slutnju da je

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n\lambda & 1 \end{bmatrix} \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Dalje dokaz provodimo indukcijom. Baza lako slijedi. Pretpostavimo sada da vrijedi

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n\lambda & 1 \end{bmatrix}.$$

Provodimo korak indukcije

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n\lambda & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ (n+1)\lambda & 1 \end{bmatrix}.$$

Time je slutnja dokazana.

2. a) Preslikavanje $f : S_1 \to S_2$ je injektivno ako različiti originali imaju uvijek različite slike, tj. ako

$$\forall x_1, x_2 \in S_1 \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Ova je tvdnja ekvivalentna tvrdnji

$$\forall x_1, x_2 \in S_1 \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

b) Neka su f i g injektivna preslikavanja za koje mozemo definirati $g \circ f$. Tada imamo

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$$

pa je i preslikavanje $g \circ f$ injektivno.

3.

$$z^3 = \frac{-\sqrt{3} - 1 + i(1 - \sqrt{3})}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = -\sqrt{3} + i.$$

$$z^3 = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$$

$$z = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right), \quad k = 0, 1, 2 \dots$$

4. Mora biti sh$x \neq 0$ iz čega slijedi $x \neq 0$. Mora biti $x^2 - 5 \neq 0$ što daje $x \neq \pm\sqrt{5}$. Mora biti $-1 \leq \frac{1}{x^2-5} \leq 1$ iz čega slijedi $|x^2 - 5| \geq 1$.
Riješimo nejdednadžbu $|x^2 - 5| \geq 1$. Imamo 2 slučaja.
a) $x^2 - 5 \geq 0$ tj. $x \in \left\langle -\infty, -\sqrt{5}\right] \cup \left[\sqrt{5}, +\infty\right\rangle$ daje $x^2 \geq 6$ tj. $x \in \left\langle -\infty, -\sqrt{6}\right] \cup \left[\sqrt{6}, +\infty\right\rangle$ pa je rješenje ovog slučaja

$$x \in \left\langle -\infty, -\sqrt{6}\right] \cup \left[\sqrt{6}, +\infty\right\rangle.$$

b) $x^2 - 5 \leq 0$ tj. $x \in \left[-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right]$ daje $x^2 \leq 4$ tj. $x \in [-2, 2]$ pa je rješenje ovog slučaja

$$x \in [-2, 2].$$

Dakle, domena funkcije je

$$D(f) = \left\langle -\infty, -\sqrt{6}\right] \cup [-2, 0\rangle \cup \langle 0, 2] \cup \left[\sqrt{6}, +\infty\right\rangle$$

Grupa B

1. Računanjem za male n-ove dolazimo na slutnju da je

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ (2^n - 1)\lambda & 2^n \end{bmatrix} \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Dalje dokaz provodimo indukcijom. Baza lako slijedi. Pretpostavimo sada da vrijedi

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ (2^n - 1)\lambda & 2^n \end{bmatrix}$$

za neki $n \in \mathbf{N}$. Provodimo korak indukcije

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ (2^n - 1)\lambda & 2^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ (2^{n+1} - 1)\lambda & 2^{n+1} \end{bmatrix}.$$

Time je slutnja dokazana.

2. a)Preslikavanje $f : S_1 \to S_2$ je surjektivno ili preslikavanje S_1 na S_2, ako je $f(S_1) = S_2$, tj. ako je svaki $y \in S_2$ slika nekoga $x \in S_1$, dakle:

$$\forall y \in S_2 \; \exists x \in S_1 \; f(x) = y.$$

b) Neka su $f : S_1 \to S_2$ i $g : S_2 \to S_3$ surjekcije. Tada imamo

$$(g \circ f)(S_1) = g(f(S_1)) = g(S_2) = S_3.$$

pa je $g \circ f$ surjekcija.

3.

$$z^3 = \frac{\sqrt{3} - 1 + i(1+\sqrt{3})}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = -1 - i\sqrt{3}.$$

$$z^3 = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

$$z = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right), \quad k = 0, 1, 2\dots$$

4. Mora biti ch$x \neq 1$ iz čega slijedi $x \neq 0$. Mora biti $x^2 - 3 \neq 0$ što daje $x \neq \pm\sqrt{3}$. Mora biti $-1 \leq \frac{1}{x^2-3} \leq 1$ iz čega slijedi $|x^2 - 3| \geq 1$.
Riješimo nejdednadžbu $|x^2 - 3| \geq 1$. Imamo 2 slučaja.
a) $x^2 - 3 \geq 0$ tj. $x \in \left\langle -\infty, -\sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{3}, +\infty\right\rangle$ daje $x^2 \geq 4$ tj. $x \in \langle -\infty, -2] \cup [2, +\infty\rangle$ pa je rješenje ovog slučaja

$$x \in \langle -\infty, -2] \cup [2, +\infty\rangle .$$

b) $x^2 - 3 \leq 0$ tj. $x \in \left[-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right]$ daje $x^2 \leq 2$ tj. $x \in \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$ pa je rješenje ovog slučaja

$$x \in \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right].$$

Dakle, domena funkcije je

$$D(f) = \langle -\infty, -2] \cup \left[-\sqrt{2}, 0\right\rangle \cup \left\langle 0, \sqrt{2}\right] \cup [2, +\infty\rangle$$