

Rješenja 2. školske zadaće iz Matematike 1, grupe 1 i 5

Grupa A:

1.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2} = \frac{1}{2}$$

2. Niz (a_n) je rastući: $a_1 = 0 < 1 = a_2$. Iz $a_n < a_{n+1}$ slijedi

$$\frac{3}{4}a_n + 1 < \frac{3}{4}a_{n+1} + 1,$$

tj. $a_{n+1} < a_{n+2}$.

Omeđen je odozgo s npr. 4: $a_1 = 0 < 4$ Pretp. $a_n < 4$, tada $a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + 1 < 3 + 1 = 4$. Zaključujemo da je konvergentan i iz $L = \frac{3}{4}L + 1$ slijedi $L = 4$.

3. (a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists m \in \mathbb{R})(x < m \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon)$

(b) e^{-15}

4. Lijevi i desni limesi od f u točki 2 moraju se podudarati. Desni limes u 2 dobiva se uvrštavanjem i jednak je $\sqrt{a+4}$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2+2x+4) = 12.$$

Sada lako dobivamo $a = 140$.

Grupa B:

1.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^{n+1}-1}{3-1}}{3^n+1} = \frac{3}{2}$$

2. Niz (a_n) je rastući: $a_1 = 0 < 2 = a_2$. Iz $a_n < a_{n+1}$ slijedi

$$\frac{5}{7}a_n + 2 < \frac{5}{7}a_{n+1} + 2,$$

tj. $a_{n+1} < a_{n+2}$.

Omeđen je odozgo s npr. 7: $a_1 = 0 < 7$ Pretp. $a_n < 7$, tada $a_{n+1} = \frac{5}{7}a_n + 2 < 5 + 2 = 7$. Zaključujemo da je konvergentan i iz $L = \frac{5}{7}L + 2$ slijedi $L = 7$.

3. (a) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow (\forall m \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < m)$

(b) e^6

4. Lijevi i desni limesi od f u točki 3 moraju se podudarati. Lijevi limes u 3 dobiva se uvštavanjem i jednak je $9 + a$.

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2+3x+9}{x+3} = \frac{9}{2}.$$

Sada lako dobivamo $a = -9/2$.