

Matematika 1 - ponavljanje gradiva:

Za odgovaranje na ova pitanja utrošite oko 3 sata vremena, ne koristeći pritom literaturu.

- Izračunajte $\binom{12}{8}$.
 - Napišite binomni poučak.
- U kompleksnoj ravнинi skicirajte skup točaka koji zadovoljavaju jednadžbu $|z + i| = 1$.
- Riješite jednadžbu $z^4 + 4i = 0$, uz skicu u kompleksnoj ravнинi.
- Je li matrica $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ inverz matrice $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$? Obrazložite!
- Ako su \mathbf{A} i \mathbf{B} regularne matrice tako da je $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{X}\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{B}^2\mathbf{C}$, izrazite matricu \mathbf{X} pomoću matrica \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} i (ili) njihovih inverza i kvadrata.
 - Napišite i izvedite formulu u kojoj se inverz umnoška matrica \mathbf{A} i \mathbf{B} izražava pomoću inverza matrica \mathbf{A} i \mathbf{B} .
- Zadana je matrica $\mathbf{A} = (a_{ij})$ reda 5 na sljedeći način: $a_{ii} = -4$, $a_{ij} = 1$ za $i \neq j$.
 - Izračunajte $\det \mathbf{A}$.
 - Možete li, na osnovu izračunatog u a), zaključiti da sustav $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$, neovisno o \vec{b} , ima jednoznačno rješenje, beskonačno rješenja ili ih nema ili pak to ovisi o \vec{b} i, ako da, kako to možete karakterizirati?
- Zadan je niz (a_n) : $a_1 = 0$, $a_{n+1} = \frac{a_n+3}{5}$, $n \in \mathbf{N}$. Dokažite da je niz (a_n) monoton i omeđen, te izračunajte $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ koristeći monotonost i omeđenost niza (objasnite kako ste to koristili u izvodu).
 - Navedite primjer niza realnih brojeva koji je konvergentan, a nije monoton.
- Odredite parametar a tako da funkcija:
 - $f(x) = -x^2 + 4x - 1$, $x < 1$, $f(x) = ax$, $x \geq 1$, bude neprekinuta u točki $x = 1$.
 - $g(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x \neq 0$, $g(0) = a$, bude neprekinuta u točki $x = 0$.
- Koristeći definiciju derivacije, izvedite derivaciju funkcije $f(x) = x^n$, $n \in \mathbf{N}$.
 - Koristeći a) i pravilo za derivaciju inverzne funkcije, izvedite derivaciju funkcije $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbf{N}$.
- Je li funkcija f iz zadatka 8.a) derivabilna u točki $x = 1$? Obrazložite!
 - Je li funkcija g iz zadatka 8.b) derivabilna u točki $x = 0$? Obrazložite!

11. Ako je jednađbom $x^3y + xy^4 = 1$ definirana y kao funkcija od x , izračunajte y' .
12. Ako je jednađbama $x = x(t)$, $y = y(t)$, definirana y kao funkcija od x , izvedite formulu za y' i obrazložite koja ste pravila deriviranja u pojedinom koraku izvoda koristili.
13. Nadjite jednađbu sinusoida kojoj su susjedne nul-točke 0, 1 i 2, jedan njezin maksimum je u točki $x = \frac{1}{2}$, jedan njezin minimum je u točki $x = \frac{3}{2}$, a tangenta na sinusoidu u ishodištu zatvara s osi x kut od 60° .
14. Nadjite točku na krivulji $y = e^x$ najbližu pravcu $y = 2x - 1$. Nacrtajte sliku !
15. U lik omeđen krivuljama $y = 1 - x^2$ i osi x upisan je pravokutnik čije su stranice paralelne koordinatnim osima tako da mu je površina maksimalna. Koliko iznosi ta površina ?
16. Aproximirajte funkciju $f(x) = e^x$ desetim Taylorovim polinomom u razvoju oko točke 0 i dokažite (koristi džepno računalo !) da je pogreška aproksimacije na intervalu $[-1, 1]$ manja od 10^{-6} .
17. Nadjite jednađbu kose asimptote krivulje $y = x \cdot \ln\left(e + \frac{1}{x}\right)$.
18. Skicirajte kvalitativni graf funkcije $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ (nije potrebno tražiti intervale konveksnosti i konkavnosti).
19. Skicirajte kvalitativni graf funkcije $f(x) = x \cdot e^{-x^2}$ (uz intervale monotonosti, potrebno je tražiti intervale konveksnosti i konkavnosti).
20. (a) Dokažite: Ako je f neprekinuta funkcija na $[a, b]$, onda je $\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right) = f(x)$, za svaki $x \in [a, b]$. Naznačite u kojim ste koracima koristili neprekinutost funkcije f .
(b) Koristeći dokazano pod a), izvedite Newton-Leibnizovu formulu.
21. Izračunajte površinu lika omeđenog krivuljama $y = x^4$ i $y = 4$. Nacrtajte sliku !
22. Izračunajte $\int_0^4 x^3 \cdot e^{-x^2} dx$.
23. Izračunajte $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cdot \cos^3 x dx$.
24. Izračunajte $\int \frac{dx}{x^3 + x^2 + x + 1}$.