

Rješenja Završnog ispita iz Matematike 1

17. siječnja 2011.

1. Neka su a i b duljine stranica pravokutnika te O i P opseg i površina. Iz uvjeta zadatka imamo da mora vrijediti $100O + 200P = 20000$, tj. $100(2a + 2b) + 200ab = 20000$ što nakon sređivanja daje $a + b + ab = 100$. Sada možemo npr. izraziti b pomoću a tj.

$$b = \frac{100 - a}{1 + a}.$$

Sada je površina pravokutnika u ovisnosti o a dana s $P(a) = \frac{100a - a^2}{1 + a}$. Tražimo ekstreme površine, pa stoga deriviramo: $P'(a) = \frac{-a^2 - 2a + 100}{(1 + a)^2}$. Pozitivno rješenje jednadžbe $P'(a) = 0$ je $a = \sqrt{101} - 1$. Kako je duljina stranice pravokutnika ograničena odozdo s 0, a odozgo s 100 (zbog cijene žičane ograde) potrebno je provjeriti ponašanje površine u rubovima. Očito je $\lim_{a \rightarrow 0^+} P(a) = \lim_{a \rightarrow 100^-} P(a) = 0$ iz čega zaključujemo da se maksimum zaista postiže za

$$a = \sqrt{101} - 1, \quad b = \frac{100 - \sqrt{101} + 1}{1 + \sqrt{101} - 1} = \sqrt{101} - 1.$$

2. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{x}) = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (x + 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{x}) = 2 \cdot \frac{-\pi}{2} = -\pi;$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \text{ iz čega slijedi } f'(x) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1;$$

$f''(x) = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$, dakle u $x = -1$ imamo lokalni maksimum, dok u $x = 1$ imamo lokalni minimum.

f raste na $\langle -\infty, -1 \rangle$ i na $\langle 1, +\infty \rangle$ te pada na $\langle -1, 0 \rangle$ i na $\langle 0, 1 \rangle$.

f je konkavna na $\langle -\infty, 0 \rangle$ i konveksna na $\langle 0, +\infty \rangle$.

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x + 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (1 + \frac{2}{x} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}) = 1;$$

$$l = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = 0, \text{ dakle kosa asimptota je pravac } y = x.$$

3. Knjižica 11, stranica 25.

4. $2x^3 - x^2 + 2x - 1 = (2x - 1)(x^2 + 1)$

Rastav na parcijalne razlomke: $\frac{3x + 1}{2x^3 - x^2 + 2x - 1} = \frac{2}{2x - 1} + \frac{-x + 1}{x^2 + 1}$;

$$\int \frac{3x + 1}{2x^3 - x^2 + 2x - 1} = \ln|2x - 1| - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + \operatorname{arctg} x + C$$

5. 1. Način: Supstitucija: $x = \sin t$; $dx = \cos t dt$.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - x^2} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 + \cos 2t) dt = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

2. Način: Traženi integral jednak je površini P određenoj pravcima $x = 0$, $x = 1/2$, $y = 0$ i lukom jedinične kružnice. Podijelimo li površinu P pravcem kroz ishodište i točku $T = (1/2, \sqrt{3}/2)$, dobivamo da je P jednaka zbroju površine kružnog isječka s kutom $\pi/6$ i trokuta s osnovicom duljine $1/2$ i visinom duljine $\sqrt{3}/2$. Dakle imamo:

$$P = \frac{1^2 \cdot \frac{\pi}{6}}{2} + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

6. 1. Način: $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^3 x} dx = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{th} x}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \frac{1}{2} \operatorname{th}^2 x \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2}.$

2. Način: $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^3 x} dx = \int_0^{\infty} \frac{d(\operatorname{ch} x)}{\operatorname{ch}^3 x} dx = -\frac{1}{2 \operatorname{ch}^2 x} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2}.$

7. $P = \int_1^e \ln x dx = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e dx = e - x \Big|_1^e = 1.$

8. $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Za $n = 1$ očito vrijedi pa pretpostavimo da vrijedi za n .

$$z^{n+1} = z^n \cdot z = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$= [\text{adicijski teoremi}] = r^{n+1} (\cos(n+1)\varphi + i \sin(n+1)\varphi).$$

9. $\mathbf{X} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}$; $\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$

10. $(x^2)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x+h) = 2x.$

11. $L = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1 - \cos x - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}}{x^n} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin x - \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}}{nx^{n-1}}.$

Odavde vidimo da je za $n = 1$ $L = 0$

$$L = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin x (1 - \frac{1}{\cos^3 x})}{nx^{n-1}} = [\sin x \sim x] = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\cos^3 x - 1}{nx^{n-2} \cos^3 x}$$

$$L = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(\cos x - 1)(1 + \cos x + \cos^2 x)}{nx^{n-2} \cos^3 x} = \left[\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1 + \cos x + \cos^2 x}{\cos^3 x} = 3 \right] =$$

$$L = 3 \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\cos x - 1}{nx^{n-2}}$$

Odavde vidimo da je za $n = 2$ $L = 0$. Neka je sada $n > 2$.

$$L = 3 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2 \sin^2 \frac{x}{2}}{n x^{n-2}} = \left[\sin^2 \frac{x}{2} \sim \frac{x^2}{4} \right] = -\frac{3}{2n} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{n-4}}.$$

Dakle, za $n = 3$ je $L = 0$. Za $n = 4$ je $L = -\frac{3}{8}$, te je za $n > 4$ $L = -\infty$.

$$\text{Sumarno: } L = \begin{cases} 0, & n \leq 3; \\ -\frac{3}{8}, & n = 4; \\ -\infty, & n \geq 5. \end{cases}$$

12. $R + v = 15 \Rightarrow v = 15 - R$

$$V = R^2 \pi v = (15 - R) R^2 \pi = (15R^2 - R^3) \pi$$

$0 = V' = (30R - 3R^2) \pi = 3R \pi (10 - R) \Rightarrow R = 0$ ili $R = 10$. $R = 0$ nema smisla i geometrijski je očigledno da se u $R = 10$ postiže maksimum. Dakle, $v = 5$ i $V = 500\pi$.

13. $OA \dots y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$, $OB \dots y = \sqrt{3}x$.

Neka je $A = (a, 1/a)$, $B = (b, 1/b)$, $A' = (a, 0)$ i $B' = (b, 0)$.

1. Način: Traženu površinu P možemo izraziti kao

$$P = P(OBB') + \int_a^b \frac{1}{x} dx - P(OAA').$$

No, $P(OBB') = P(OAA')$ jer je $\frac{1}{2}x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$ za sve $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Stoga je $P = \ln a - \ln b$.

$$\text{Iz } \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}}x \Rightarrow x = \sqrt[4]{3} \text{ tj. } a = \sqrt[4]{3}.$$

$$\text{Iz } \frac{1}{x} = \sqrt{3}x \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \text{ tj. } b = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}.$$

$$P = \frac{1}{4} \ln 3 - \left(-\frac{1}{4} \ln 3\right) = \frac{1}{2} \ln 3.$$

2. Način: Možemo izračunati površinu direktno integrirajući:

$$P = \int_0^{\frac{1}{\sqrt[4]{3}}} \left(\sqrt{3}x - \frac{1}{\sqrt{3}}x \right) dx + \int_{\frac{1}{\sqrt[4]{3}}}^{\sqrt[4]{3}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{3}}x \right) dx = \dots = \frac{1}{2} \ln 3.$$