

Rješenja ponovljenog Završnog ispita iz Matematike 1

1. Neka je V volumen stupa, a stranica i v visina. Iz uvjeta zadatka imamo:

$$1080 = 60V + (a^2 + 4av)$$

. Iz ovoga možemo izraziti visinu pomoću stranice a tj.

$$v = \frac{108 - a^2}{6a^2 + 4a}.$$

Sada je $V(a) = a^2v = \frac{108a - a^3}{6a + 4}$.

$V'(a) = -\frac{3(a^3 + a^2 - 36)}{(3a + 2)^2}$. Lako se vidi da je jedina realna nultočka funkcije V' $a_0 = 3$. Kako je $\lim_{a \rightarrow \pm\infty} V(a) = -\infty$ zaključujemo da funkcija V u $a_0 = 3$ ima lokalni i globalni maksimum.

Dakle, maksimalni mogući volumen jest $V(3) = \frac{27}{2}$.

2. $D(f) = [0, \infty)$;

$$f'(x) = e^{-\sqrt{x}} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right) \text{ iz čega slijedi } f'(x) = 0 \Rightarrow x_0 = 4;$$

$$f''(x) = \frac{e^{-\sqrt{x}}}{4\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 3), \text{ dakle u } x = 4 \text{ imamo lokalni maksimum.}$$

f raste na $[0, 4)$ i pada na $\langle 4, \infty)$.

f je konkavna na $\langle 0, 9)$ i konveksna na $\langle 9, \infty)$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{\sqrt{x}}} = [L'H] \dots = 0.$$

3. Knjižica 11, stranica 25.

4. Supstitucija: $e^t - 1 = x^2$, $e^t dt = 2x dx \Rightarrow dt = \frac{2x dx}{x^2 + 1}$.

$$\int_{\ln 2}^b \frac{dt}{\sqrt{e^t - 1}} = \int_1^{\sqrt{e^b - 1}} \frac{2}{x^2 + 1} dx = 2 \arctg x \Big|_1^{\sqrt{e^b - 1}} = 2 \arctg \sqrt{e^b - 1} - 2 \arctg 1 = \frac{\pi}{6}$$
$$\Rightarrow \arctg \sqrt{e^b - 1} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \sqrt{e^b - 1} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \Rightarrow b = \ln 4.$$

5. $\int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| dx = \left[|\ln x| = \begin{cases} \ln x, & x \geq 1 \\ -\ln x, & 0 < x < 1 \end{cases} \right] = -\int_{\frac{1}{e}}^1 \ln x dx + \int_1^e \ln x dx$
 $= [\text{parcijalna integracija, } u = \ln x, dv = dx] = \dots = 2 - \frac{2}{e}.$

$$6. \int_0^{\infty} \frac{x dx}{x^4 + 1} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2 \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{4}.$$

7. Neka je $a > 0$ apcisa točke u kojoj se sijeku pravac $y = 2$ i graf funkcije $y = \operatorname{ch} x$, tj. $a = \operatorname{arch} 2$.

$$P = 2a - \int_0^a \operatorname{ch} x dx = 2a - \operatorname{sh} a = 2 \ln(1 + \sqrt{3}) - \sqrt{3}.$$

$$l = \int_0^a \sqrt{1 + (\operatorname{ch}' x)^2} dx = \int_0^a \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x} dx = \int_0^a \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} a = \sqrt{3}.$$

$$O = 1 + a + \operatorname{sh} a = 1 + \ln(2 + \sqrt{3}) + \sqrt{3}.$$

8. Domena: $\left| \frac{\pi}{x} \right| \leq 1 \Rightarrow |x| \geq \pi \Rightarrow D(f) = \langle -\infty, -\pi \rangle \cup [\pi, \infty)$.

$$\arcsin \frac{\pi}{x} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{\pi}{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2\pi.$$

9. $(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C})^{-1} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}$

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -5 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$10. \ln' x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{x+h}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h} = \left[\ln \left(1 + \frac{h}{x}\right) \sim \frac{h}{x} \right] = \frac{1}{x}.$$

$$11. \operatorname{ch}^x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{\operatorname{ch} x_1}{720} x^4 \text{ za neki } x_1 \in \langle 0, x \rangle \text{ ili } x_1 \in \langle x, 0 \rangle.$$

12. Nultočke funkcije $y(x)$ su 1 i 3. Neka je točka (x, y) gornji lijevi kut traženog pravokutnika, a točka $A = (x, 0)$ donji lijevi kut. Označimo sa $z = x - 1$ udaljenost točke A od točke $(1, 0)$. Tada je $B = (3 - z, 0) = (4 - x, 0)$ donji desni kut traženog pravokutnika. Sada je $|AB| = 4 - x - x = 4 - 2x$.

$$P(x) = (4 - 2x)y = (4 - 2x)(-x^2 + 4x - 3x) = 2x^3 - 12x^2 + 22x - 12$$

$$P'(x) = 6x^2 - 24x + 22$$

$3x^2 - 12x + 11 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{3}}{3}$. Rješenje x_1 odbacujemo jer je $x_1 > 3$ Nadalje, iz geometrijskih razloga, očito je da će površina poprimiti maksimum u $x_2 = \frac{6 - \sqrt{3}}{3}$.

$$P_{\max} = P(x_2) = \frac{4}{9} \sqrt{3}.$$

$$13. P = 2 \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx = 4\sqrt{2}.$$