Vježbe 9

Marko Sossich

21. svibnja 2016.

Sadržaj

1. Specijalna teorija relativnosti
   - Zadatak 1.
   - Zadatak 2.
   - Zadatak 3.
   - Zadatak 4.
   - Zadatak 5.

Lorentzove transformacije

- Za prijelaz iz inercijalnog sustava S u inercijalni sustav S' koji se s obzirom na S giba stalnom brzinom v u pozitivnom smjeru osi x vrijede Lorentzove transformacije:

$$x' = \gamma(x - vt) = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \; ; \; y' = y \; ; \; z' = z, \qquad (1)$$

$$t' = \gamma(t - vx/c) = \frac{t - vx/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \text{ gdje je } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \qquad (2)$$

- Inverzne transformacije iz sustava S' u S:

$$x = \gamma(x' + vt') \; ; \; y' = y \; ; \; z' = z, \qquad (3)$$

$$t = \gamma(t' + vx'/c) \text{ gdje je } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \qquad (4)$$

Kontrakcija duljine i dilatacija vremena

- Ako štap u odnosu na sustav S u kojem miruje ima duljinu $l0$, za promatrača u sustavu S' štap će imati duljinu:

$$l = l_0\sqrt{1 - v^2/c^2}, \tag{5}$$

- Vremenski interval Δt_0 između dva događaja u istoj točki prostora inercijskog sustava S' (vlastito vrijeme) i vremenski interval ta dva ista događaja, ali mjeren u sustavu S', povezani su relacijom:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{6}$$

Relativističke transformacije brzine

- Relativističko zbrajanje brzina dano je:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - u_x v/c^2};\ u'_y = \frac{u_y}{\gamma(1 - u_x v/c^2)};\ u'_z = \frac{u_z}{\gamma(1 - u_x v/c^2)}, \tag{7}$$

- gdje je u_x' brzina tijela u sustavu S' koji se giba brzinom v u smjeru osi x u odnosu na mirujući sustav S.
- Inverzne transformacije:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + u'_x v/c^2};\ u_y = \frac{u'_y}{\gamma(1 + u'_x v/c^2)};\ u_z = \frac{u'_z}{\gamma(1 + u'_x v/c^2)}. \tag{8}$$

Relativistička količina gibanja i energija

- Relativistička količina gibanja dana je:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{9}$$

- Ukupna energija čestice:

$$E = \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{10}$$

- Energija mirovanja:

$$E_0 = mc^2, \tag{11}$$

- Kinetička energija čestice:

$$E_k = E - E_0 \tag{12}$$

Relativistička invarijantna jednadžba

- Jednadžba koja vrijedi u svim sustavima i povezuje ukupnu energiju, masu i količinu gibanja dana je:

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4. \tag{13}$$

Zadatak 1.

1. Nestabilna elementarna čestica mion μ ima vrijeme pouraspada $\tau_\mu = 2.2\ \mu$s. Ona nastaje npr. u raspadu nabijenog piona $\pi^- \to \mu^- + \nu\mu$, a uz nju nastaje i (njezin) antineutrino, a raspada se tzv. β-raspadom ovako: $\mu^- \to e^- + \nu e + \nu\mu$. Ako su mioni nastali na visini od 60 km iznad zemlje, izračunajte brzinu miona kada oni (ipak) dođu do zemlje, ako od ukupno stvorenog broja miona detektori primijete (samo) 1/8 od broja stvorenih miona (pod pretpostavkom da se mioni (sustav S') gibaju jednolikom brzinom po pravcu). (Vrijeme poluraspada je ono vrijeme za koje se od ukupnog broja nestabilnih čestica, ili npr. jezgri, polovina raspadne.)

Zadatak 1.

Rješenje:
Počinjemo od trenutka $t_1' = t_1 = 0$ gdje je t vrijeme mjereno sa Zemlje (miran promatrač), a t' vrijeme mjereno u sustavu koji se giba (sustav miona), iz zakona radioaktivnog raspada:

$$N(t') = N_0 e^{-\ln 2 \frac{t'}{\tau}}, \tag{14}$$

trebamo naći vrijeme za koje se raspala $1/8$ ukupne količine nastalih miona $N(t_2') = N_0/8$:

$$N_0/8 = N_0 e^{-\ln 2 \frac{t_2'}{\tau}}, \tag{15}$$

logaritmiramo jednadžbu i dobivamo:

$$-3 = -\frac{t_2'}{\tau} \Rightarrow t_2' = 3\tau. \tag{16}$$

Zadatak 1.

Vrijeme koje je proteklo u sustavu miona S' je 3τ, zbog dilatacije vremena sustav na Zemlji (mirujući sustav) S mjeri drugo vrijeme:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{17}$$

sustav je inercijalan i giba se jednolikom brzinom:

$$v = \frac{H}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{H}{v}, \tag{18}$$

pa imamo:

$$\frac{H}{v} = \frac{3\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{19}$$

konačno dobivamo brzinu:

$$v = c\frac{H}{\sqrt{H^2 + (3\tau)^2 c^2}} = 0.9995c. \tag{20}$$

Zadatak 2.

2. Sustav S' giba se u odnosu na sustav S brzinom $v = 0.9c$ u smjeru $+x$-osi. U početnom trenutku ($t = 0$) osi obaju sustava se poklapaju. U sustavu S' čestica ima komponente brzine $u'_x = 0.8c$, $u'_y = 0.5c$ i $u'_z = 0$. Izračunajte komponente vektora brzine čestice i iznos brzine u sustavu S.

Zadatak 2.

Rješenje:
Zadatak se jednostavno riješava relativističkim zbrajanjem brzina u sustavu S:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + u'_x v/c^2} = \frac{1.7}{1.72} c = 0.9883c, \tag{21}$$

$$u_y = \frac{u'_y}{\gamma(1 + u'_x v/c^2)} = \frac{0.5c}{2.29(1.72)} = 0.127c, \tag{22}$$

$$u_z = \frac{u'_z}{\gamma(1 + u'_x v/c^2)} = \frac{0}{\gamma(1 + u'_x v/c^2)} = 0. \tag{23}$$

Zadatak 3.

3. Odredi iznos količine gibanja elektrona kojemu je kinetička energija jednaka njegovoj energiji mirovanja!

Zadatak 3.

Rješenje:
Odnos kinetičke energije, ukupne energije u energije mirovanja dana je:

$$E_k = E - E_0, \tag{24}$$

gdje je energija mirovanja $E_0 = mc^2$, iz uvjeta zadatka $E_k = E_0$ slijedi:

$$E = E_k + E_0 = 2mc^2, \tag{25}$$

impuls slijedi iz relativističke invarijante:

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4, \tag{26}$$

$$4m^2c^4 = p^2c^2 + m^2c^4 \Rightarrow p = \sqrt{3}mc. \tag{27}$$

Zadatak 4.

4. Mirujuće tijelo mase M raspada se na dva tijela masa m_1 i m_2. Odredite reletivističku kinetičku energiju T_1 i T_2 produkata raspada.

Zadatak 4.

Rješenje:
Mirujuće tijelo ima ukupnu energiju:

$$E^2 = M^2c^4 + p^2c^2 \Rightarrow E = Mc^2, \tag{28}$$

tijelo 1. i tijelo 2. imaju energije:

$$E_1^2 = m_1^2c^4 + p_1^2c^2, \tag{29}$$

$$E_2^2 = m_2^2c^4 + p_2^2c^2, \tag{30}$$

iz zakona očuvanja impulsa:

$$\vec{p}_1 = -\vec{p}_2, \tag{31}$$

Zadatak 4.

te iz zakona očuvanja ukupne energije:

$$E = E_1 + E_2 \Rightarrow E_2 = E - E_1, \tag{32}$$

ubacimo E_2 u jednadžbu za ukupnu energiju čestice 2. slijedi:

$$(E - E_1)^2 = m_2^2 c^4 + p_2^2 c^2, \tag{33}$$

kako je $p_1 = -p_2$ te $p_1^2 = E_1^2 - m_1^2 c^4$ dobivamo:

$$(E - E_1)^2 = m_2^2 c^4 + (E_1^2 - m_1^2 c^4), \tag{34}$$

$$E^2 - 2EE_1 + E_1^2 = m_2^2 c^4 + E_1^2 - m_1^2 c^4, \tag{35}$$

Zadatak 4.

tražimo kinetičku energiju $T_1 = E_1 - m_1c^2$ pa uvrstimo uz $E = Mc^2$:

$$M^2c^4 - 2Mc^2(T_1 + m_1c^2) = m_2^2c^4 - m_1^2c^4, \tag{36}$$

sredimo i izlučimo T_1:

$$T_1 = c^2\frac{(M - m_1)^2 - m_2^2}{2M}, \tag{37}$$

analogno:

$$T_2 = c^2\frac{(M - m_2)^2 - m_1^2}{2M}. \tag{38}$$

Zadatak 5.

5. Pravokutni trokut ima katetu a koji zatvara kut $\alpha = 30^\circ$ s hipotenuzom. Izračunajte kut α' u sustavu S' koji se kreće brzinom $v = 0.886c$ duž katete a.

Zadatak 5.

Rješenje:
Zbog efekta kontrakcije duljine stranica a i hipotenuza c se smanjuju čime se kut α povećava (Slika na ploči). U pravokutnom trokutu vrijedi:

$$a = c\cos\alpha, \tag{39}$$

te u sustavu S':

$$a' = c'\cos\alpha', \tag{40}$$

duljina katete a se skraćuje po zakonu:

$$a' = a\sqrt{1 - v^2/c^2}. \tag{41}$$

Zadatak 5.

Druga kateta b nije u smjeru gibanja te ostaje nepromijenjena $b = b'$:

$$b = c \sin \alpha, \tag{42}$$

$$b' = c' \sin \alpha' \tag{43}$$

$$\Rightarrow c \sin \alpha = c' \sin \alpha', \tag{44}$$

uvrstimo c' u jednadžbu za a':

$$a' = c \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} \cos \alpha', \tag{45}$$

također vrijedi $c = \frac{a}{\cos \alpha}$ pa imamo:

$$a' = \frac{a}{\cos \alpha} \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} \cos \alpha'. \tag{46}$$

Zadatak 5.

Uvrstimo $a' = a\sqrt{1 - v^2/c^2}$:

$$a\sqrt{1 - v^2/c^2} = \frac{a}{\cos\alpha}\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'}\cos\alpha', \tag{47}$$

konačno izrazimo α':

$$\tan\alpha' = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{48}$$