Ponovljeni 2. međuispit iz Matematike 1

2.2.2010.

1. [2 boda] a) Dokaži da je niz (a_n) zadan s $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \frac{a_n+2}{5},\ n \in \mathbb{N}$, monoton i omeđen.

b) Izračunaj $\lim_{n\to+\infty} a_n$, te objasni gdje su u izvodu limesa korištena svojstva iz a).

2. [2 boda] Izračunaj: **a)** $\lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)\cdot(\sqrt{x^2+x+1}+x)}{3x^2+2x+1}$,

b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{(3x+1)\cdot(\sqrt{x^2+x+1}-x)}$.

3. [2 boda] Izračunaj

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}^2(3x)}{x\cdot \ln(1+2x)}.$$

4. [2 boda] Koristeći definiciju derivacije, izvedi derivaciju funkcije $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

5. [2 boda] Napiši formulu za derivaciju kompozicije dviju funkcija i koristeći se njome izvedi formulu za derivaciju inverzne funkcije. Primjenom spomenute formule dokaži

$$(\mathrm{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

6. [3 boda] Funkciju $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ napiši u obliku $f(x) = T_3(x) + R_3x)$, gdje je $T_3(x)$ treći Taylorov polinom funkcije $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ u razvoju oko točke $x_0 = 0$, a $R_3(x)$ je treći ostatak u Lagrangeovom obliku.

7. [2 boda] Odredi derivaciju funkcije $f(x) = (1+x^2)^{\frac{1}{x}}$.

8. [3 boda] Ako je $y = y(x)$ zadana implicitno jednadžbom $x^2y + xy^3 = 2$, izračunaj y' i y'' u točki $T(1,1)$, te nađi jednadžbu tangente na krivulju $y = y(x)$ u točki T.

9. [2 boda] Izračunaj

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{tg}(5x)}{\mathrm{tg}(3x)}.$$

Vrijeme pisanja je 90 minuta.

Dozvoljeno je korištenje samo službenog podsjetnika.